

Przybliżona analiza układów nieliniowych

December 13, 2011

0.1 Specyfikacja układów nieliniowych

Nieliniowe równanie różniczkowe

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, x^{(m-1)}, \dots, x, t) = 0.$$

Układ nieliniowy pobudzony sygnałem sinusoidalnym $\sin \omega t$, w przeciwieństwie do układu liniowego, daje na wyjściu dodatkowe składowe harmoniczne o innych (wyższych) pulsacjach niż pulsacja podstawowa ω .

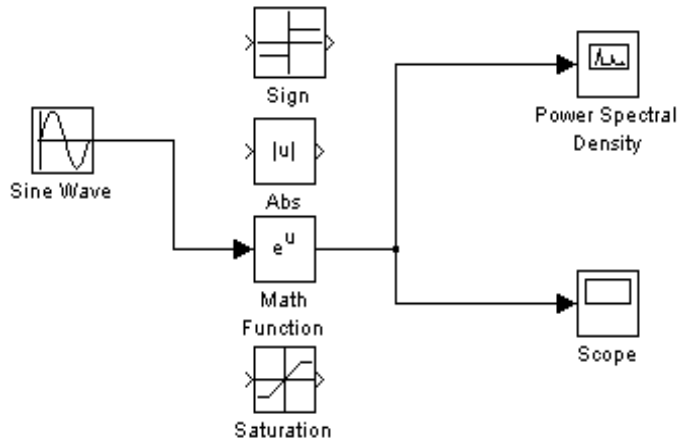


FIGURE 1. Obserwacja widm procesów wyjściowych elementów nieliniowych

Nie ma zastosowania transformacja Laplace'a

Bardziej złożone struktury połączeń (np. z dodatnim sprzężeniem zwrotnym) mogą prowadzić do niejednoznacznej charakterystyki zastępczej (tzw. histerezy)

Przykład praktyczny.

$$u = \begin{cases} 1 & \text{(zawór otwarty), gdy } y(t) < y_0(t) \text{ (jest za zimno);} \\ 0 & \text{(zawór zamknięty), gdy } y(t) \geq y_0(t) \text{ (jest wystarczająco ciepło).} \end{cases}$$

0.2 Metoda funkcji opisującej

Polega na przybliżeniu elementu nieliniowego jego opisem liniowym, a następnie zastosowaniu znanych narzędzi analizy systemów liniowych.

$$u(t) = A \sin \omega t$$

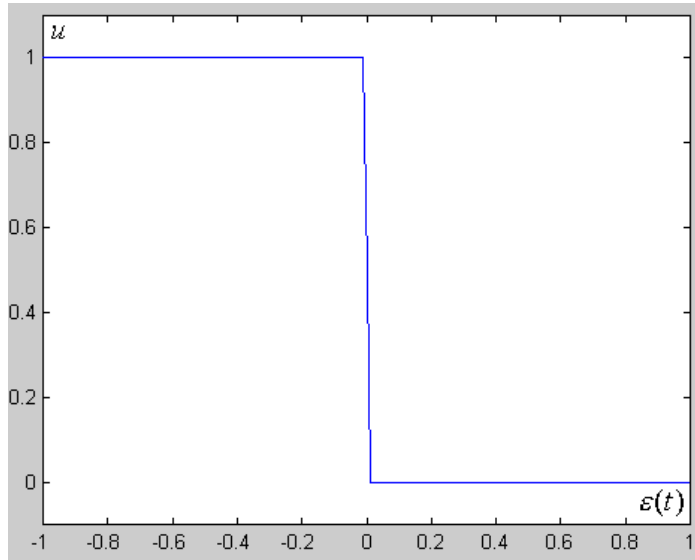


FIGURE 2. Charakterystyka statyczna termostatu

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (b_k \sin k\omega t + c_k \cos k\omega t),$$

a_0 , b_k i c_k są stałymi współczynnikami, zależnym od charakterystyki nieliniowej i amplitudy A sygnału wejściowego

$$y_1(t) = b_1 \sin \omega t + c_1 \cos \omega t \approx y(t)$$

„transmitancja” zwana funkcją opisującą

$$J(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{b_1 + jc_1}{A}.$$

przykłady [Wiszniewski 2000]

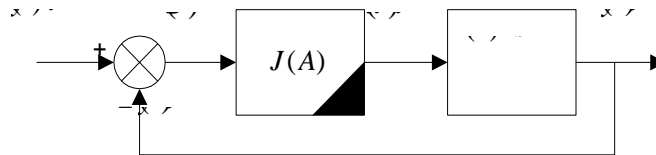


FIGURE 3. UAR z regulatorem nieliniowym

"Równanie charakterystyczne"

$$1 + J(A)K_O(j\omega) = 0,$$

TABLE 1. Funkcje opisujące popularnych elementów nieliniowych

Charakterystyka $f(x)$	Funkcja opisująca dla $x(t) = A \sin \omega t$
$f(x) = \max \{kx, B\}$	$J(A) = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{B}{Ak} + \frac{B}{Ak} \left(1 - \left(\frac{B}{Ak} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)$
$f(x) = \begin{cases} B, & \text{dla } x \geq 0 \\ -B, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$	$J(A) = \frac{4B}{\pi A}$
$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < a \\ B, & \text{dla } x \geq a \\ -B, & \text{dla } x < -a \end{cases}$	$J(A) = \frac{4B}{\pi A} \left(1 - \left(\frac{a}{A} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

cykl graniczny

$$K_O(j\omega) = -\frac{1}{J(A)}.$$

Krzywa na płaszczyźnie zespolonej o współrzędnych $(\operatorname{Re}[-\frac{1}{J(A)}], \operatorname{Im}[-\frac{1}{J(A)}])$ określa granicę między stabilnością i niestabilnością systemu (odpowiednik punktu $(-1, j0)$ w kryterium Nyquista).

Przykład [Wiszniewski, 2000]

Obiekt

$$K_O(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+1)}$$

regulator

$$u = B \cdot \operatorname{sgn}(\varepsilon).$$

Można pokazać, że

$$J(A) = \frac{4B}{\pi A}.$$

Rozwiązujemy

$$-\frac{1}{J(A)} = K_O(j\omega),$$

poprzez porównanie części rzeczywistych i urojonych jego obu stron i otrzymujemy

$$\omega = 1 \text{ i } A = \frac{2B}{\pi}.$$

W układzie powstaną więc drgania okresowe o amplitudzie $A = 2B/\pi$ i pulsacji $\omega = 1$.

0.3 Model systemu nieliniowego w postaci szeregu Volterra v

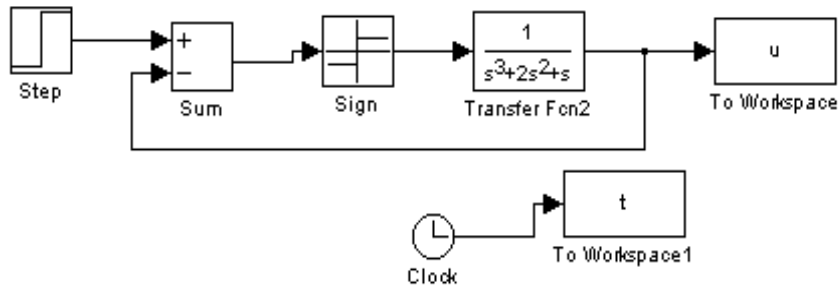


FIGURE 4. Układ z przekaźnikiem dwupołożeniowym

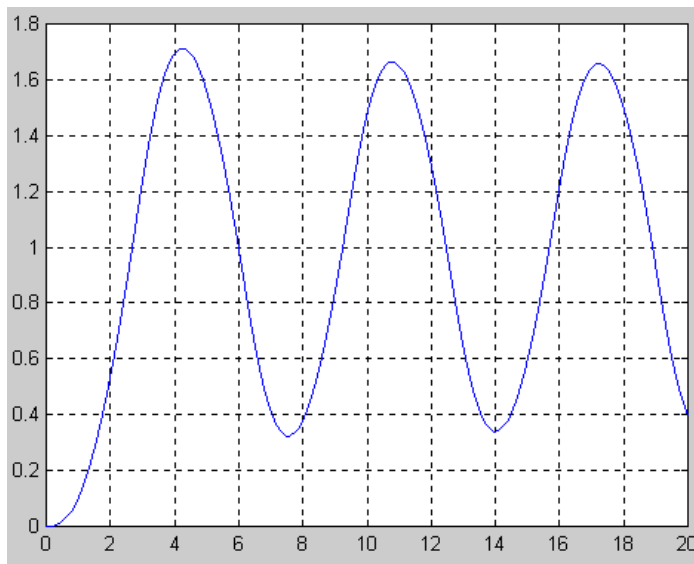


FIGURE 5. Przebieg wyjścia obiektu $y(t)$ (gdzie $A \approx 2/\pi$, $\omega \approx 1$)

0.3 Model systemu nieliniowego w postaci szeregu Volterra

$$\begin{aligned}
 y(t) = & h^{(0)} + \int_R h^{(1)}(\tau_1)x(t - \tau_1)d\tau_1 + \\
 & + \int_R h^{(2)}(\tau_1, \tau_2)x(t - \tau_1)x(t - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 + \\
 & + \int_R h^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)x(t - \tau_1)x(t - \tau_2)x(t - \tau_3)d\tau_1d\tau_2d\tau_3 + \dots
 \end{aligned}$$

0.4 Modele Hammersteina i Wienera

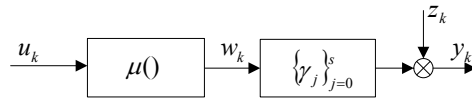


FIGURE 6. Hammerstein system

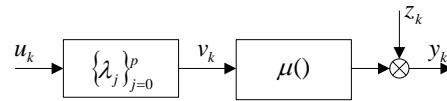


FIGURE 7. Wiener system