Modele obiektów z czasem dyskretnym i ich identyfikacja

Grzegorz Mzyk

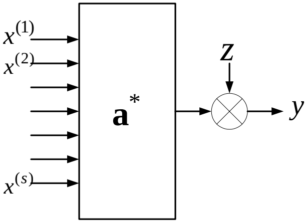
Zakład Sterowania i Optymalizacji
Instytut Informatyki, Automatyki i Robotyki
Politechnika Wrocławska

2008

Plan

Typowe modele
– *liniowe* obiekty *statyczne* typu *MISO*
– *liniowe* obiekty *dynamiczne* typu *SISO (MA i ARMA)*
Metoda najmniejszych kwadratów (LS)

Liniowy obiekt statyczny (1)



Rysunek: Liniowy obiekt statyczny typu *MISO*

$$\mathbf{a}^* = \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_s^* \end{bmatrix}$$

Założenia:

$\mathbf{E}z = 0$, $\mathrm{var}z < \infty$

$x^{(i)}$, z – niezależne

$$\mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & .. & x_1^{(s)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & .. & x_2^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N^{(1)} & x_N^{(2)} & .. & x_N^{(s)} \end{bmatrix}$$

Liniowy obiekt statyczny (2)

$$\mathbf{Y}_N = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_N = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}$$

Równanie pomiarów

$$\mathbf{Y}_N = \mathbf{X}_N \mathbf{a}^* + \mathbf{Z}_N$$

Model

$$\overline{\mathbf{Y}}_N(\mathbf{a}) = \mathbf{X}_N \mathbf{a}$$

Istota metody najmniejszych kwadratów

$$\left\| \mathbf{Y}_N - \overline{\mathbf{Y}}_N(\mathbf{a}) \right\|_2^2 \rightarrow \min_{\mathbf{a}}$$

Równania normalne

$$\mathbf{X}_N^T \mathbf{X}_N \mathbf{a} = \mathbf{X}_N^T \mathbf{Y}_N$$

Warunek jednoznaczności rozwiązania

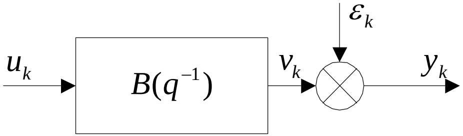
$$\mathrm{rank} \mathbf{X}_N = s$$

Estymator NK

$$\widehat{\mathbf{a}}_N = \left(\mathbf{X}_N^T \mathbf{X}_N \right)^{-1} \mathbf{X}_N^T \mathbf{Y}_N = \mathbf{X}_N^+ \mathbf{Y}_N$$

$$\widehat{\mathbf{a}}_N \xrightarrow{p.1} \mathbf{a}^*, \text{ gdy } N \rightarrow \infty$$

Liniowy obiekt dynamiczny typu MA(s) (1)



Rysunek: Model *MA*

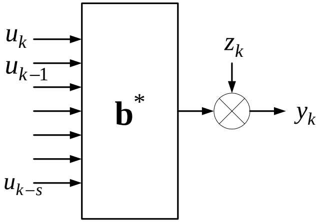
$$v_k = b_0^* u_k + \ldots + b_s^* u_{k-s}$$

$$y_k = v_k + \varepsilon_k$$

$$y_k = b_0^* u_k + \ldots + b_s^* u_{k-s} + z_k$$

$$z_k = \varepsilon_k$$

Liniowy obiekt dynamiczny typu MA(s)



Rysunek: Model *MA*

$$\mathbf{b}^* = \begin{bmatrix} b_0^* \\ b_1^* \\ \vdots \\ b_s^* \end{bmatrix}$$

Założenia:

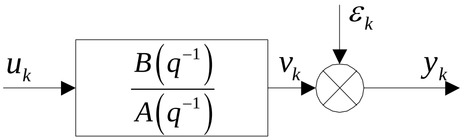
$\mathbf{E}z = 0$, $\mathrm{var} z < \infty$

$\{u_k\}$, $\{z_k\}$ – niezależne

$$\Phi_N = \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \\ \vdots \\ \phi_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_0 & .. & u_{1-s} \\ u_2 & u_1 & .. & u_{2-s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_N & u_{N-1} & .. & u_{N-s} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_N = \Phi_N \mathbf{b}^* + \mathbf{Z}_N \qquad \widehat{\mathbf{b}}_N = \left(\Phi_N^T \Phi_N\right)^{-1} \Phi_N^T \mathbf{Y}_N$$

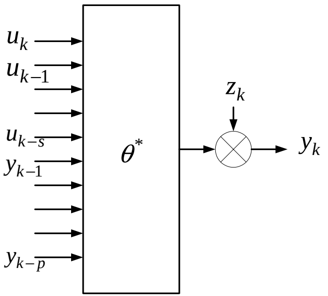
Liniowy obiekt dynamiczny typu ARMA(s,p) (1)



Rysunek: Model *ARMA*

$$
\begin{aligned}
v_k &= b_0^* u_k + \ldots + b_s^* u_{k-s} + a_1^* v_{k-1} + \ldots. + a_p^* v_{k-p} \\
y_k &= v_k + \varepsilon_k \\
y_k &= b_0^* u_k + \ldots + b_s^* u_{k-s} + a_1^* y_{k-1} + \ldots. + a_p^* y_{k-p} + z_k \\
z_k &= \varepsilon_k - a_1^* \varepsilon_{k-1} - \ldots - a_p^* \varepsilon_{k-p}
\end{aligned}
$$

Liniowy obiekt dynamiczny typu ARMA(s,p) (2)



Rysunek: Model *ARMA*

$$\theta^* = \begin{bmatrix} b_0^* \\ b_1^* \\ \vdots \\ b_s^* \\ a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_p^* \end{bmatrix}$$

$\mathbf{E}z = 0$, $\mathrm{var}z < \infty$

u_{k-i}, z_k – niezależne

y_{k-i}, z_k – zależne, gdy $\{z_k\}$ jest procesem skorelowanym

Liniowy obiekt dynamiczny typu ARMA(s,p) (3)

$$\Phi_N = \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \\ \vdots \\ \phi_N^T \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_0 & \cdots & u_{1-s} & y_0 & y_{-1} & \cdots & y_{1-p} \\ u_2 & u_1 & \cdots & u_{2-s} & y_1 & y_0 & \cdots & y_{2-p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_N & u_{N-1} & \cdots & u_{N-s} & y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_{N-p} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_N = \Phi_N \theta^* + \mathbf{Z}_N \qquad \widehat{\theta}_N = \left(\Phi_N^T \Phi_N\right)^{-1} \Phi_N^T \mathbf{Y}_N$$