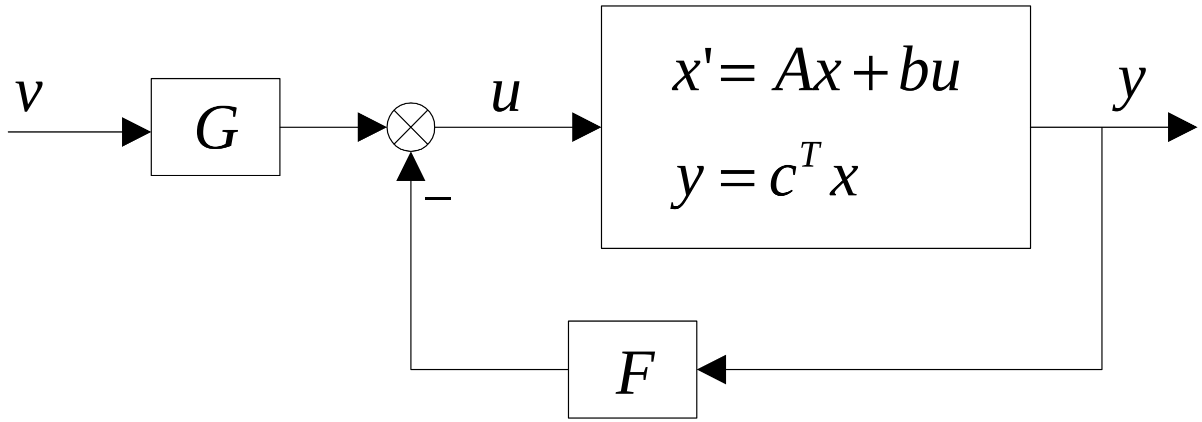
#04
Układy ze sprzężeniem zwrotnym, przesuwanie biegunów

Statyczne sprzężenie zwrotne od wyjścia



$$
\begin{aligned}
u &= -Fy + Gv = -Fc^T x + Gv \\
x' &= Ax + b\left(-Fc^T x + Gv\right) = \left(A - bFc^T\right)x + bGv
\end{aligned}
$$

Opis układu zamkniętego (o wejściu v)

$$x' = A_z x + B_z v \qquad\qquad y = c^T x$$

gdzie

$$A_z = A - bFc^T, \qquad\qquad B_z = bG$$

Sformułowanie zadania przesuwania biegunów za pomocą sprzężenia zwrotnego od wyjścia

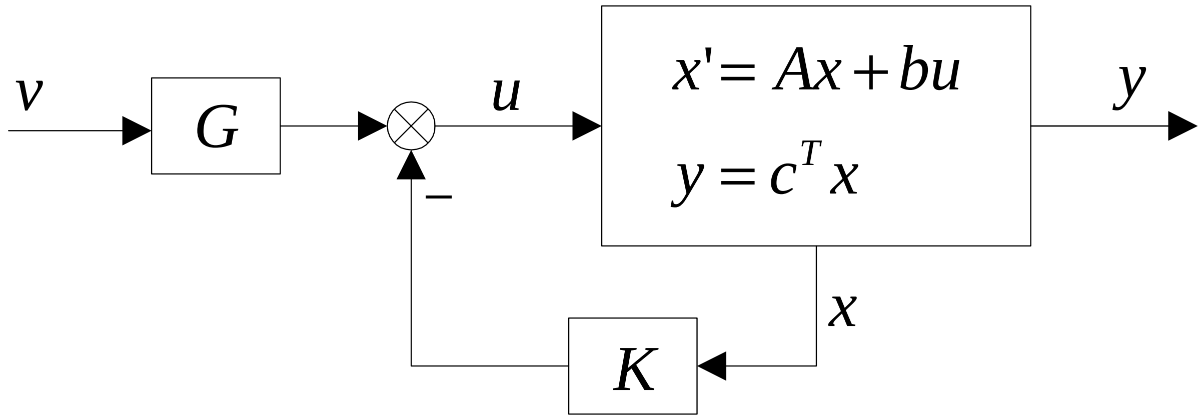
Dane są A, b i c oraz pożądany wielomian charakterystyczny układu zamkniętego

$$w_z(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + ... + d_1 s + d_0$$

Wyznaczyć macierz F taką, że

$$\det(sI - A_z) = \det\left(sI - A + bFc^T\right) = w_z(s)$$

Statyczne sprzężenie zwrotne od stanu



$$
\begin{aligned}
u &= -Kx + Gv \\
x' &= Ax + b\left(-Kx + Gv\right) = \left(A - bK\right)x + bGv
\end{aligned}
$$

Opis układu zamkniętego (o wejściu v)

$$x' = A_z x + B_z v \qquad\qquad y = c^T x$$

gdzie

$$A_z = A - bK, \qquad\qquad B_z = bG$$

Sformułowanie zadania przesuwania biegunów za pomocą sprzężenia zwrotnego od stanu

Dane są A i c oraz pożądany wielomian charakterystyczny układu zamkniętego

$$w_z(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + ... + d_1 s + d_0$$

Wyznaczyć macierz K taką, że

$$\det(sI - A_z) = \det(sI - A + bK) = w_z(s) \qquad (1)$$

Rozwiązanie

Lemat 1 *Jeżeli para A, b ma postać kanoniczną*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

to macierz K spełniająca (1) ma postać

$$K = [d_0 - a_0, d_1 - a_1, ..., d_{n-1} - a_{n-1}]$$

Przekształcenie opisu systemu sterowalnego do postaci kanonicznej (gdy para (A, b) nie jest w postaci kanonicznej)

Odpowiednia macierz podobieństwa ma postać

$$P = \begin{bmatrix} p \\ pA \\ \vdots \\ pA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{gdzie } p \text{ jest ostatnim } (n\text{-tym}) \text{ wierszem} \\ \text{macierzy odwrotnej } [b, Ab, ..., A^{n-1}b]^{-1} \end{array}$$

Wtedy para (PAP^{-1}, Pb) jest opisem kanonicznym tego samego systemu.

Lemat 2 *Jeżeli para (A, b) jest sterowalna, to macierz K spełniająca (1) ma postać*

$$K = [d_0 - a_0, d_1 - a_1, ..., d_{n-1} - a_{n-1}]P$$

Przykład

Dla układu o macierzach $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ wyznaczyć macierz sprzężenia zwrotnego od stanu $K \in R^{1,2}$ taką że układ zamknięty będzie miał bieguny równe $s_1 = s_2 = -2$.

Rozwiązanie

Pożądany wielomian charakterystyczny układu zamkniętego ma postać

$$w_z(s) = (s - s_1)(s - s_2) = (s + 2)(s + 2) = s^2 + 4s + 4$$

czyli $d_0 = d_1 = 4$. Dalej

$$[b, Ab]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ a zatem } p = [1, -1]$$

Macierz podobieństwa

$$P = \begin{bmatrix} p \\ pA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Postać kanoniczna

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (czyli } a_0 = 1,\ a_1 = -2\text{) oraz } Pb = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Macierz sprzężenia

$$K = [d_0 - a_0, d_1 - a_1]P = [3, 6] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [9, -3]$$

Sprawdzenie

Macierz układu zamkniętego

$$A_z = A - bK = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [9, -3] = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$$

ma wartości własne $s_1 = s_2 = -2$.