#03
Sterowalność i obserwowalność układów liniowych

Sterowalność

Definicja. *Układ nazywamy **sterowalnym**, jeżeli istnieje t^* takie, że dla każdej pary stanów $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^*)$ istnieje sterowanie $u(t)$ przeprowadzające ten układ ze stanu początkowego $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ do stanu końcowego $\mathbf{x}(t^*) = \mathbf{x}^*$.*

Twierdzenie. *Układ jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz*

$$\mathbf{S} = [\mathbf{b},\ \mathbf{Ab},\ \mathbf{A}^2\mathbf{b},\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}]$$

jest pełnego rzędu, tj. gdy $\mathrm{rank}\mathbf{S} = k$.

Obserwowalność

Definicja. *Układ nazywamy* ***obserwowalnym****, jeżeli przy dowolnym sterowaniu $u(t)$ istnieje skończona chwila t_k, po której, na podstawie sygnałów $u(t)$ i $y(t)$ w przedziale czasu od t_0 do t_k, można wyznaczyć stan układu $x(t_0)$ w dowolnej chwili początkowej t_0.*

Twierdzenie. *Układ jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz*

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix}$$

jest pełnego rzędu, tj. gdy $\mathrm{rank}\mathbf{Q} = k$.

Macierze podobne

Definicja. *Macierze* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *nazywamy* ***podobnymi****, jeżeli istnieje taka macierz* $\mathbf{T}$*, że*

$$\mathbf{B} = \mathbf{TAT}^{-1}$$

Własność. *Macierze podobne mają takie same:*
– wielomiany charakterystyczne
– wartości własne
– wektory własne
– wyznaczniki
– ślady

Opisy równoważne

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{– opisuje go trójka } (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T) \qquad (1)$$

$\mathbf{x}(t)$ – wektor stanu

Podstawmy $\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{x}$

$$\begin{cases} \mathbf{v}'(t) = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}(t) + \mathbf{T}\mathbf{b}u(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}(t) \end{cases} \quad \begin{array}{c}\text{– ten sam system opisuje} \\ \text{trójka } (\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{T}\mathbf{b}, \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1})\end{array} \qquad (2)$$

$\mathbf{v}(t)$ – wektor stanu

Definicja. *Opisy* (1) *i* (2) *nazywamy* ***równoważnymi.***

Postacie kanoniczne

Twierdzenie. *Każdy system sterowalny ma opis równoważny, w którym*

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad \mathbf{Tb} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ – współczynniki wiel. charakterystycznego macierzy $\mathbf{A}$

Postacie kanoniczne (c.d.)

Twierdzenie. *Każdy system obserwowalny ma opis równoważny, w którym*

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ – współczynniki wiel. charakterystycznego macierzy $\mathbf{A}$