Podstawy teorii decyzji

1. Podstawowe pojęcia

Parametr generowany przez przyrodę – θ (np. wielkość jutrzejszych opadów deszczu, wynik losowania itp.)
Znana funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(\theta)$
Musimy podjąć decyzję d co to wartości, jaką uzyska θ.
Funkcja strat (*ang. loss function*) – określa, jaki koszt poniesiemy, gdy podejmiemy decyzję d, a prawdziwy parametr będzie miał wartość θ. Przykłady takich funkcji:

$$\begin{aligned} L(d,\theta) &= |d-\theta| \\ L(d,\theta) &= (d-\theta)^2 \\ L(d,\theta) &= -\delta\,(d-\theta) \end{aligned}$$

Ryzyko (*ang. risk*) – wartość oczekiwana funkcji strat

$$R(d) = EL(d,\theta) = \int L(d,\theta) f(\theta) d\theta$$

2. Kwadratowa funkcja strat

$$\begin{aligned} R(d) &= EL(d,\theta) = E\,(d-\theta)^2 = E(d^2 - 2d\theta + \theta^2) = \\ &= d^2 - 2dE\theta + E\theta^2 \\ \frac{\partial R(d)}{\partial d} &= 2d - 2E\theta, \text{ zatem } \frac{\partial R(d)}{\partial d} = 0 \text{ dla } d = E\theta \end{aligned}$$

$d^* = E\theta$ **optymalną decyzją jest wartość oczekiwana parametru** θ

3. Funkcja strat typu moduł

oznaczmy $F(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta} f(\theta) d\theta$

$$
\begin{aligned}
R(d) &= EL(d,\theta) = E\left|d-\theta\right| = \int_{-\infty}^{d}(d-\theta)f(\theta)d\theta - \int_{d}^{\infty}(d-\theta)f(\theta)d\theta = \\
&= d\left[\int_{-\infty}^{d} f(\theta)d\theta - \int_{d}^{\infty} f(\theta)d\theta\right] - \left[\int_{-\infty}^{d} \theta f(\theta)d\theta - \int_{d}^{\infty} \theta f(\theta)d\theta\right]
\end{aligned}
$$

różniczkujemy po d

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R(d)}{\partial d} &= 1\cdot[F(d)-(1-F(d))] + d[f(d)+f(d)] - [df(d)-(-df(d))] = \\
&= 2F(d)-1\text{, } \textbf{zatem decyzja jest optymalna gdy } F(d)=\frac{1}{2} \textbf{ (mediana)}
\end{aligned}
$$

korzystaliśmy z definicji pochodnej

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{d}\theta f(\theta)d\theta\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{d+h}\theta f(\theta)d\theta - \int_{-\infty}^{d}\theta f(\theta)d\theta}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_{d}^{d+h}\theta f(\theta)d\theta}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{hdf(d)}{h} = df(d)
\end{aligned}
$$

4. Funkcja strat typu delta

$$
\begin{aligned}
R(d) &= EL(d,\theta) = -E\delta\left(d-\theta\right) = -\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(d-\theta\right)f(\theta)d\theta = f(d) \\
f(d) &\to \max_{d}
\end{aligned}
$$

najlepszą decyzją jest parametr najbardziej prawdopodobny

5. Przykładowa gra

Podajemy liczbę d, automat losuje liczbę θ z następującego rozkładu

$$\theta = \begin{cases} 0, \text{ z prawdopodobieństwem } \frac{1}{3} \\ 1, \text{ z prawdopodobieństwem } \frac{1}{3} \\ 5, \text{ z prawdopodobieństwem } \frac{1}{3} \end{cases}$$

Gra 1) gdy musimy zapłacić $|d - \theta|$ złotych
najlepszą decyzją (minimalizującą ryzyko) jest mediana zmiennej θ, czyli $d^* = 1$, wtedy

$$R(d^*) = E\,|d - \theta| = 1\text{zł} \cdot \frac{1}{3} + 0\text{zł} \cdot \frac{1}{3} + 4\text{zł} \cdot \frac{1}{3} = \text{średnio } 1.66\text{zł (mniej nie można)}$$

Gra 2) musimy zapłacić $(d - \theta)^2$ złotych
teraz najlepszą decyzją (minimalizującą ryzyko) jest wartość oczekiwana zmiennej θ, czyli $d^* = 2$, wtedy

$$R(d^*) = E(d - \theta)^2 = 4\text{zł} \cdot \frac{1}{3} + 1\text{zł} \cdot \frac{1}{3} + 9\text{zł} \cdot \frac{1}{3} = \text{średnio } 4.66\text{zł (mniej nie można)}$$

Gra 3) jeśli trafimy – wygrywamy dom i samochód
należy podjąć decyzję $d = 0$, $d = 1$ lub $d = 5$, wszystkie zdarzenia $\theta = 0$, $\theta = 1$ i $\theta = 5$ są tak samo ("najbardziej") prawdopodobne, inne decyzje wykluczają szansę na wygraną