

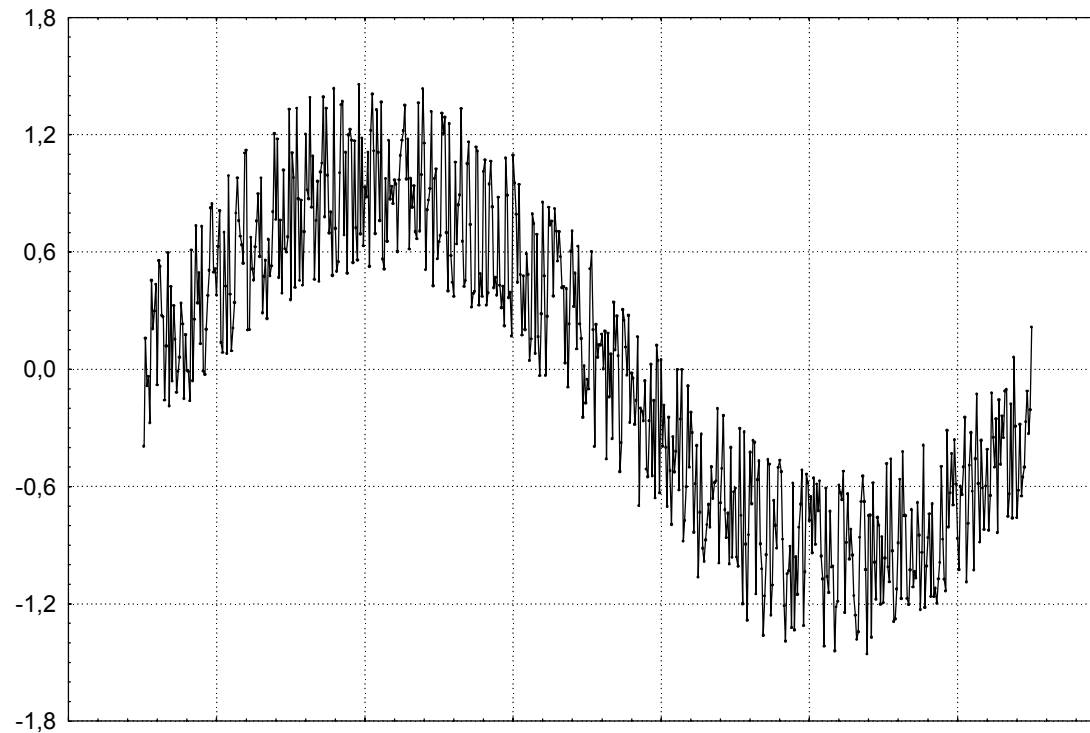
5.

Procesy stochastyczne – klasyfikacja

1. Proces stochastyczny

Przykład 1

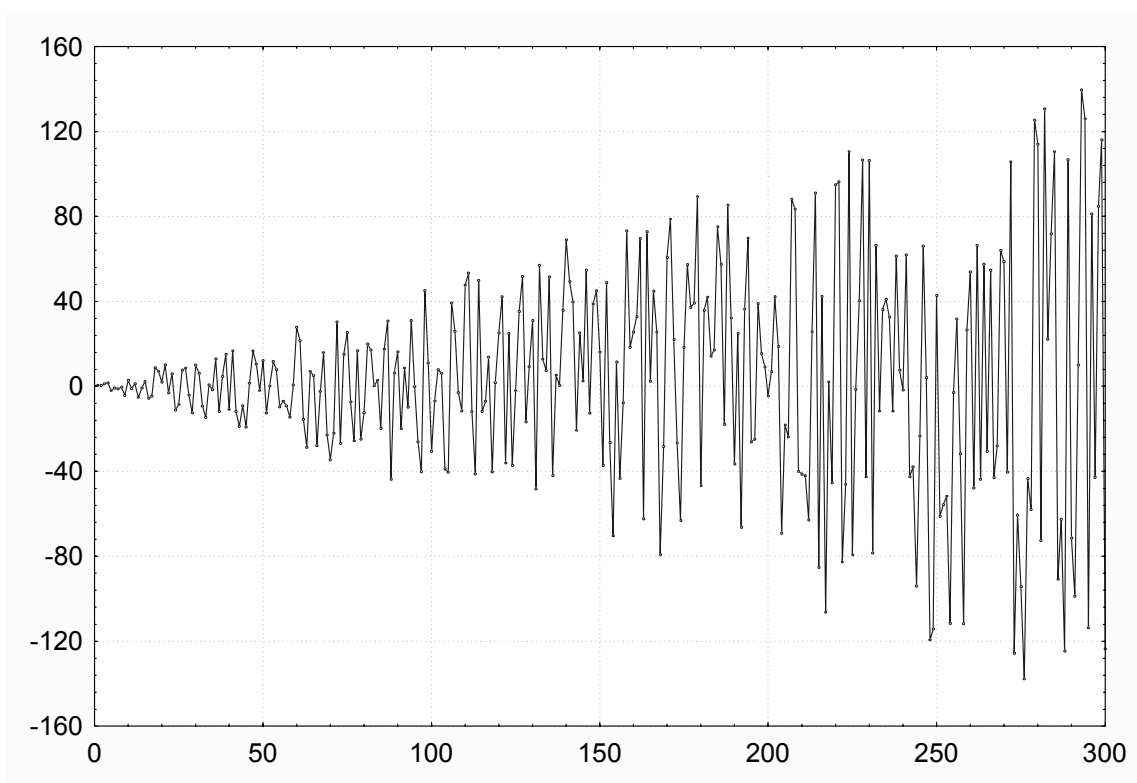
$X(t, \omega) = \sin ct + u(\omega)$, gdzie $c = \text{const}$, natomiast $u(\omega) \sim U[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ – losowe



$$\begin{aligned} \mathbf{E}X(t, \omega) &= \mathbf{E}\{\sin ct + u(\omega)\} = \mathbf{E}\{\sin ct\} + \mathbf{E}\{u(\omega)\} = \sin ct - \text{funkcja czasu} \\ \text{var}X(t, \omega) &= \text{var}\{\sin ct + u(\omega)\} = \text{var}\{u(\omega)\} = \frac{1}{12} = \text{const} - \text{nie zależy od czasu} \end{aligned}$$

Przykład 2

$X(t, \omega) = u(\omega, t)$, gdzie $c = const$, natomiast $u(\omega, t) \sim U[\frac{-t}{2}, \frac{t}{2}]$ – losowe



$$\begin{aligned} \mathbf{E}X(t, \omega) &= 0 = const - \text{nie zależy od czasu} \\ \text{var}X(t, \omega) &= \frac{(\frac{t}{2} - (-\frac{t}{2}))^2}{12} = \frac{t^2}{12} - \text{funkcja czasu} \end{aligned}$$

2. Stacjonarność (w szerokim sensie)

momenty drugiego rzędu nie ulegają zmianie w czasie

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X(t, \omega) &= m = \text{const}, \text{ dla każdego } t \\ \text{var}X(t, \omega) &= \sigma_x^2 = \text{const}, \text{ dla każdego } t \\ A_X(t_1, t_2) &= A_X(t_2 - t_1), \text{ dla każdego } t_1 \text{ i } t_2\end{aligned}$$

3. Ścisła stacjonarność (w węższym sensie)

probabilistyczne charakterystyki procesu (wielowymiarowe gęstości) nie ulegają zmianie w czasie

$$\begin{aligned}f(x, t) &= f_t(x) = f(x), \text{ dla każdego } t \\ f(x_1, x_2; t_1, t_2) &= f_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = f_{t_1+\tau, t_2+\tau}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2; t_2 - t_1) \\ f(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3) &= f_{t_1+\tau, t_2+\tau, t_3+\tau}(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}$$

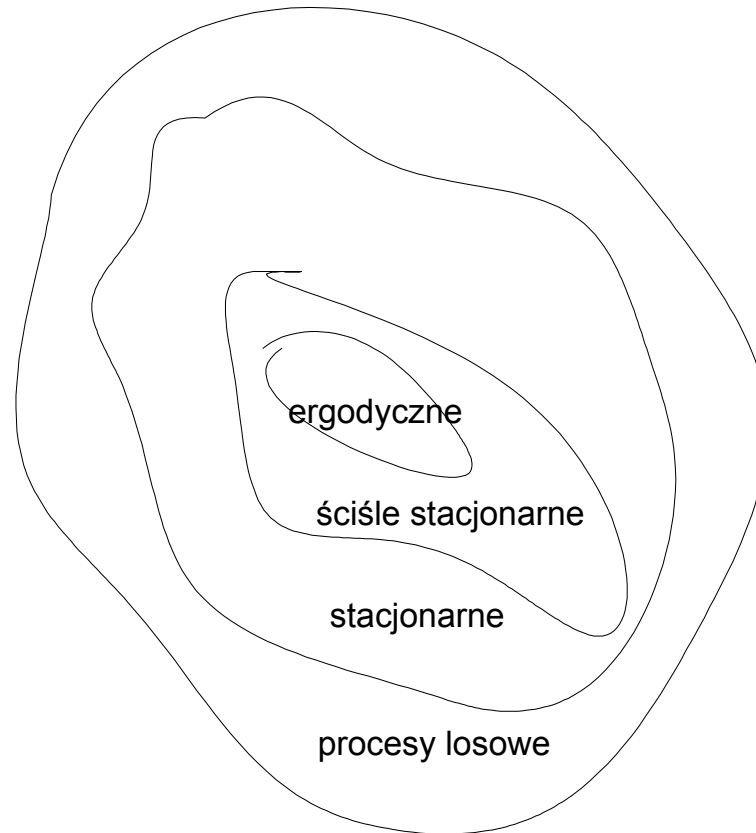
4. Ergodyczność

zachodzą następujące równości (z prawdopodobieństwem 1)

$$\mathbf{E}X(\omega, t) = m \stackrel{p.1}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt, \text{ gdzie } x(t) \text{ jest dowolną realizacją procesu}$$

dalej, dla uproszczenia prezentacji, niech $m = 0$ (proces scentrowany)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X^2(\omega, t) &= \sigma_x^2 \stackrel{p.1}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \\ A_X(\tau) &= \mathbf{E}\{X(\omega, t)X(\omega, t + \tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt\end{aligned}$$



5. Typowe modele parametryczne procesów losowych

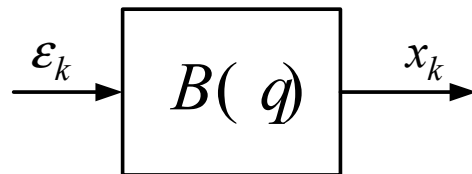
ruchoma średnia (*ang. moving average*) rzędu l , ozn. $MA(l)$

$$x_k = \beta_0 \varepsilon_k + \beta_1 \varepsilon_{k-1} + \dots + \beta_l \varepsilon_{k-l}, \text{ gdzie } \{\varepsilon_k\} - \text{biały szum}$$

$q = z^{-1}$ – operator przesunięcie "wstecz"

$$B(q) = \beta_0 + \beta_1 q + \dots + \beta_l q^l$$

$$x_k = B(q) \varepsilon_k$$



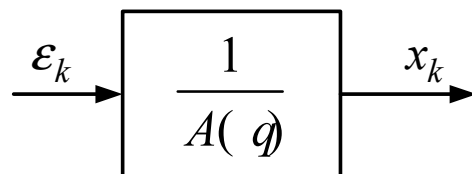
autoregresja (*ang. autoregression*) rzędu m , ozn. $AR(m)$

$$x_k + \alpha_1 x_{k-1} + \alpha_2 x_{k-2} + \dots + \alpha_m x_{k-m} = \varepsilon_k$$

$$A(q) = 1 + \alpha_1 q + \dots + \alpha_m q^m$$

$$A(q)x_k = \varepsilon_k$$

$$x_k = \frac{1}{A(q)}\varepsilon_k$$



autoregresja z ruchomą średnią – $ARMA(m,l)$

$$x_k + \alpha_1 x_{k-1} + \alpha_2 x_{k-2} + \dots + \alpha_m x_{k-m} = \beta_0 \varepsilon_k + \beta_1 \varepsilon_{k-1} + \dots + \beta_l \varepsilon_{k-l}$$

$$A(q)x_k = B(q)\varepsilon_k$$

$$x_k = \frac{1}{A(q)}B(q)\varepsilon_k$$

