

Nieparametryczne metody estymacji w identyfikacji parametrów systemów nieliniowych

Zygmunt Hasiewicz, Grzegorz Mzyk

Instytut Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, ul. Janiszewskiego 11/17, 50-372 Wrocław
tel. +48 71 320 32 77, fax. +48 71 321 26 77, e-mail: zhas(grmz)@ict.pwr.wroc.pl

STRESZCZENIE

W pracy proponuje się dwuetapową, parametryczno-nieparametryczną metodologię identyfikacji systemów Hammersteina, przy występowaniu losowych sygnałów wejściowych i zakłócających. Estymacja parametrów odbywa się w warunkach ogólniejszej (a więc mniejszej) wiedzy wstępnej o systemie, w porównaniu do metod rozpatrywanych w literaturze. W szczególności, nie zakłada się wielomianowej postaci charakterystyki nieliniowej, ani nawet jej liniowości ze względu na parametry. Dopuszcza się występowanie filtru liniowego o nieskończonej odpowiedzi impulsowej, a także skorelowanych zakłóceń, na wyjściu. W etapie 1, nie wymagającym żadnej wiedzy wstępnej, estymuje się wartości niedostępnego dla pomiaru sygnału wewnętrznego, stosując nieparametryczny estymator funkcji regresji. W etapie 2, w zależności od stopnia wiedzy wstępnej, estymuje się parametry nieliniowej charakterystyki podsystemu statycznego i liniowego obiektu dynamicznego stosując odpowiednio procedurę minimalizacji funkcji strat, lub zmodyfikowaną metodę najmniejszych kwadratów oraz zmiennych instrumentalnych. Parametry podsystemu statycznego i dynamicznego są identyfikowane całkowicie niezależnie. Podano warunki zbieżności zaproponowanych estymatorów do prawdziwych wartości parametrów systemu, a także wyznaczono ich szybkość zbieżności. Rozpatrzono popularne przypadki szczególne i przeprowadzono badania eksperymentalne.

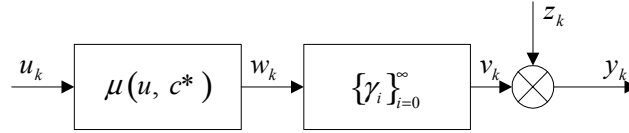
I. WPROWADZENIE

Metody stosowane w identyfikacji systemów Hammersteina (Rys. 1) można, ze względu na filozofię podejścia, podzielić na dwie kategorie: parametryczne i nieparametryczne. Pierwsze z nich bazują na wstępnej znajomości opisów komponentów z dokładnością do skończonej liczby m nieznanymi parametrów $c^* = (c_1^*, c_2^*, \dots, c_m^*)$ (np. wielomianowa postać charakterystyki $\mu(u, c^*) = \sum_{l=0}^m c_l^* u^l$; patrz [11]). Dzięki przyjęciu (zwykle niepewnej) parametrycznej wiedzy wstępnej uzyskuje się szybką zbieżność estymatorów, lecz nie zawsze do prawdziwych wartości parametrów systemu. Metody nieparametryczne nie nakładają natomiast żadnych wymagań na strukturę opisu podsystemów (np. [8], [9]). Badania pokazują ([14]-[15], [18]-[22]), że pewne zalety może mieć podejście hybrydowe. O nieznannej charakterystyce $\mu(u, c^*)$ przyjmujemy jedynie ogólne założenia jakościowe, zaś od liniowego obiektu dynamicznego wymaga się asymptotycznej stabilności. Stosując nieparametryczne techniki estymacji funkcji regresji na podstawie par pomiarów (u_k, y_k) identyfikuje się w etapie 1 niedostępny sygnał $\{w_k\}$. W etapie 2, parametrycznym (osobnym dla poszczególnych podsystemów) wymaga się wiedzy o postaci funkcyjnej charakterystyki $\mu(u, c)$ i o formie równania różnicowego opisującego filtr liniowy. W tym etapie estymuje się niezależnie parametry charakterystyki nieliniowej bloku statycznego i parametry liniowego obiektu dynamicznego na podstawie par (u_k, \hat{w}_k) i odpowiednio (\hat{w}_k, y_k) , gdzie $\{\hat{w}_k\}$ jest estymatorem nieparametrycznym sekwencji $\{w_k\}$ otrzymanym w etapie 1. Proponowane podejście ma następujące zalety: 1) otrzymuje się opis obu podsystemów w postaci zamkniętych wzorów, 2) procedura identyfikacji nie jest iteracyjna, 3) algorytm funkcjonuje poprawnie dla szerokiej klasy charakterystyk $\mu(u, c)$, 4) algorytm pracuje z powodzeniem przy skorelowanych zakłóceniach na wyjściu bez konieczności modelowania ich struktury korelacyjnej, 5) każdy z podsystemów jest identyfikowany niezależnie od drugiego, co czyni algorytm odpornym na przyjęcie błędnej informacji wstępnej o drugim podsystemie, 6) udowodniono fakt zbieżności i określono rząd jej szybkości. Zainteresowanych pełnym omówieniem zagadnienia oraz reprezentatywnymi przykładami odsyłamy do prac [1], [2], [11], [12] i [23].

II. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

A. Badany system

Przedmiotem identyfikacji jest system Hammersteina pokazany na Rys. 1, gdzie u_k , y_k i z_k oznaczają odpowiednio wartość wejścia, wyjścia i zakłócenia w chwili k , zaś w_k jest wejściem interakcyjnym, niedostępnym dla pomiarów (patrz dyskusja w [2]).



Rys. 1. System Hammersteina.

B. Założenia ogólne

Założenie 1: Znana jest postać $\mu(u, c)$ rzeczywistej charakterystyki nieliniowej $\mu(u, c^*)$, gdzie $c^* = (c_1^*, c_2^*, \dots, c_m^*)$ jest wektorem nieznanymi parametrów. Funkcja $\mu(u, c)$ jest różniczkowalna ze względu na c , o skończonym gradiencie na zwartym zbiorze C wartości dopuszczalnych parametrów

$$\|\nabla_c \mu(u, c)\| < G_{\max} < \infty, c \in C$$

Założenie 2: Liniowy obiekt dynamiczny opisany równaniem

$$v_k = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i w_{k-i} \quad (1)$$

o nieznanej odpowiedzi impulsowej $\{\gamma_i\}_{i=0}^{\infty}$, jest asymptotycznie stabilny, tzn. $\sum_{i=0}^{\infty} |\gamma_i| < \infty$.

Założenie 3: Sygnał wejściowy $\{u_k\}$ jest ograniczonym procesem losowym typu i.i.d.; $|u_k| < u_{\max}$, dla pewnego nieznanego $u_{\max} > 0$.

Założenie 4: Zakłócenie $\{z_k\}$ jest losowym procesem kolorowym generowanym przez liniowy, asymptotycznie stabilny filtr o nieznanej odpowiedzi impulsowej $\{\omega_i\}_{i=0}^{\infty}$ ($\sum_{i=0}^{\infty} |\omega_i| < \infty$)

$$z_k = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \varepsilon_{k-i} \quad (2)$$

na podstawie ograniczonego białego szumu $\{\varepsilon_k\}$ o zerowej wartości oczekiwanej ($E\varepsilon_k = 0$, $|\varepsilon_k| < \varepsilon_{\max} < \infty$), niezależnego od wejścia $\{u_k\}$. Proces $\{z_k\}$ jest zatem ograniczony ($|z_k| \leq z_{\max}$, gdzie $z_{\max} = \varepsilon_{\max} \sum_{i=0}^{\infty} |\omega_i|$) oraz $Ez_k = 0$.

Założenie 5: $\mu(u, c^*)$ jest znane w pewnym punkcie u_0 oraz $\gamma_0 = 1$.

Jak wyjaśniono szczegółowo w pracy [15], Założenie 5 ma jedynie znaczenie techniczne. Bez utraty ogólności i dla uproszczenia prezentacji można przyjąć, że $u_0 = 0$ i $\mu(0, c^*) = 0$.

III. ESTYMACJA PARAMETRÓW CHARAKTERYSTYKI NIELINIOWEJ

A. Algorytm identyfikacji

Dla N_0 wartości wejściowych $\{u_n\}$, $n = 1, 2, \dots, N_0$ zapiszmy

$$w_n = \mu(u_n, c^*)$$

oraz wprowadźmy następujące wektory

$$W_{N_0} = (w_1, w_2, \dots, w_{N_0})^T \quad \bar{\mu}_{N_0}(c) = [\mu(u_1, c), \mu(u_2, c), \dots, \mu(u_{N_0}, c)]^T \quad (3)$$

Kwadrat dowolnej normy (w szczególności euklidesowej) różnicy wektorów (3)

$$Q_{N_0}(c) = \|\bar{\mu}_{N_0}(c) - W_{N_0}\|^2 \rightarrow \min_c$$

jest minimalizowany przez wektor prawdziwych (rzeczywistych) parametrów charakterystyki nieliniowej

$$c^* = \arg \min_{c \in C} \|\bar{\mu}_{N_0}(c) - W_{N_0}\|^2, \text{ gdzie } C - \text{zbiór zwarty dopuszczalnych wartości } c.$$

Procedura identyfikacji c^* polegać zatem powinna na minimalizacji następującej funkcji strat

$$Q_{N_0}(c) = \sum_{n=1}^{N_0} [w_n - \mu(u_n, c)]^2 \rightarrow \min_c \implies c^* \quad (4)$$

Ze względu jednak na nieznaną wartość $\{w_n\}_{n=1}^{N_0}$ proponuje się ich wcześniejszą estymację nieparametryczną, co prowadzi do następującej dwuetapowej procedury.

Etap 1 (nieparametryczny): Na podstawie pomiarów $\{(u_k, y_k)\}_{k=1}^M$, dla zbioru punktów wejściowych $\{u_n; n = 1, 2, \dots, N_0\}$ takiego, że $M > N_0 \geq m = \dim c$, wyestymować odpowiadające interakcje $\{w_n = \mu(u_n, c^*); n = 1, 2, \dots, N_0\}$ jako

$$\hat{w}_{n,M} = \hat{R}_M(u_n) - \hat{R}_M(0), \quad (5)$$

gdzie $\hat{R}_M(u)$ jest nieparametrycznym estymatorem funkcji regresji $R(u)$, wyliczonym dla $u \in \{0, u_n; n = 1, 2, \dots, N_0\}$. Punkty estymacji $\{u_n\}_{n=1}^{N_0}$ mogą być punktami pomiarowymi, albo punktami wybranymi arbitralnie (brak formalnej różnicy).

Etap 2 (parametryczny): Otrzymane w etapie 1 estymatory $\hat{w}_{n,M}$ wstawić (*plug-in*) do kryterium (4) i dokonać jego minimalizacji, tzn.

$$\hat{Q}_{N_0,M}(c) = \sum_{n=1}^{N_0} [\hat{w}_{n,M} - \mu(u_n, c)]^2 \rightarrow \min_c \implies \hat{c}_{N_0,M}$$

Twierdzenie 1: Jeżeli w etapie 1 $\hat{w}_{n,M} \rightarrow w_n$ według prawdopodobieństwa dla $M \rightarrow \infty$, to zachodzi również zbieżność

$$\hat{c}_{N_0,M} \rightarrow c^*, \text{ gdy } M \rightarrow \infty \quad (6)$$

według prawdopodobieństwa, gdzie $c^* = \arg \min_{c \in C} Q_{N_0}(c)$ oraz $\hat{c}_{N_0,M} = \arg \min_{c \in C} \hat{Q}_{N_0,M}(c)$.

Szkic dowodu. Na podstawie nierówności trójkąta możemy dokonać następującej dekompozycji

$$\hat{Q}_{N_0,M}(c) = \left\| \widehat{W}_{N_0,M} - \bar{\mu}_{N_0}(c) \right\|^2 = \left\| \widehat{W}_{N_0,M} - W_{N_0} + W_{N_0} - \bar{\mu}_{N_0}(c) \right\|^2 \leq \left\| \widehat{W}_{N_0,M} - W_{N_0} \right\|^2 + \left\| W_{N_0} - \bar{\mu}_{N_0}(c) \right\|^2$$

stąd po pewnych przekształceniach

$$\sup_{c \in C} \left| \hat{Q}_{N_0,M}(c) - Q_{N_0}(c) \right| \leq \left\| \widehat{W}_{N_0,M} - W_{N_0} \right\|^2$$

a zatem przy $M \rightarrow \infty$, kryteria $\hat{Q}_{N_0,M}(c)$ i $Q_{N_0}(c)$ stają się równoważne dla każdego c i zachodzi zbieżność (6). ■

B. Przykłady

B.1 Estymator jądrowy

W etapie 1 może zostać użyty estymator jądrowy postaci [9], [10]

$$\hat{R}_M(u) = \frac{\sum_{k=1}^M y_k K\left(\frac{u-u_k}{h(M)}\right)}{\sum_{k=1}^M K\left(\frac{u-u_k}{h(M)}\right)}, \quad (7)$$

gdzie $K(u)$ jest funkcją jądra, a $h(M)$ tzw. parametrem wygładzania. Standardowymi przykładami są tu $K(u) = I_{[-0.5,0.5]}(u)$, $(1 - |u|)I_{[-1,1]}(u)$ lub $(1/\sqrt{2\pi})e^{-u^2/2}$ oraz $h(M) = \text{const} \cdot M^{-\alpha}$ ze stałą $0 < \alpha < 1$. W świetle rezultatów pracy [28] dla wymienionych przykładów zachodzi $\hat{R}_M(u) \rightarrow R(u)$ według prawdopodobieństwa, gdy $M \rightarrow \infty$, a zbieżność ma miejsce we wszystkich punktach $u \in \text{Cont}(\mu, \nu)$, ciągłości charakterystyki $\mu(u, c^*)$ i funkcji gęstości prawdopodobieństwa wejścia $\nu(u)$ (której istnienie lokalnie zakładamy), takich że $\nu(u) > 0$. Stosując w szczególności jądro Gaussa $K(u) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-u^2/2}$ oraz przyjmując $h(M) \sim M^{-1/5}$ (zgodnie z rekomendacją w [10]) otrzymuje się szybkość zbieżności rzędu $|\hat{R}_M(u) - R(u)| = O(M^{-2/5})$ według prawdopodobieństwa, a zatem $\|\hat{c}_{N_0,M} - c^*\| = O(M^{-2/5})$ według prawdopodobieństwa ($\tau = 2/5$) w Etapie 2, pod warunkiem że $\mu(u, c^*)$ i $\nu(u)$ są w punktach $u \in \{0, u_n; n = 1, 2, \dots, N_0\}$ przynajmniej dwukrotnie różniczkowalne oraz $\nu(u) > 0$.

B.2 Zastosowanie procedury Levenberga-Marquardta [3]

Minimalizacja $Q_{N_0}(c)$ w etapie 2 procedury może mieć postać iteracyjną w przestrzeni parametrów $c \in C$

$$\hat{c}_{N_0,M}^{(i+1)} = \hat{c}_{N_0,M}^{(i)} - (H_Q(\hat{c}_{N_0,M}^{(i)}) + \lambda_i I)^{-1} \nabla_Q(\hat{c}_{N_0,M}^{(i)})$$

gdzie

$$H_Q(c)[k_1, k_2] = \frac{\partial^2 Q_{N_0}(c)}{\partial c_{k_1} \partial c_{k_2}} - \text{hessian}, \quad \nabla_Q(c)[k] = \frac{\partial Q_{N_0}(c)}{\partial c_k} - \text{gradient}.$$

zaś λ_i jest wagą, modyfikowaną następująco

$$\lambda_{i+1} = \begin{cases} \lambda_i \cdot \nu, & \text{gd}y Q_{N_0}(\hat{c}_{N_0,M}^{(i+1)}) \geq Q_{N_0}(\hat{c}_{N_0,M}^{(i)}) \\ \lambda_i / \nu, & \text{gd}y Q_{N_0}(\hat{c}_{N_0,M}^{(i+1)}) < Q_{N_0}(\hat{c}_{N_0,M}^{(i)}) \end{cases}, \text{ gdzie } \nu > 1$$

Wartość $\lambda = 0$ sprowadza algorytm do czystego rozwinięcia funkcji kryterialnej $Q_{N_0}(c)$ w szereg Taylora 2-rzędu, zaś duże λ – do metody gradientowej.

B.3 Zastosowanie metody najmniejszych kwadratów

Niech funkcja $\mu(u, c^*)$ jest liniowa ze względu na parametry, tzn.

$$\mu(u, c^*) = \sum_{l=1}^m c_l^* f_l(u), \quad (8)$$

gdzie $f_1(u), \dots, f_m(u)$ jest zbiorem liniowo niezależnych funkcji bazowych, takich że

$$|f_l(u)| \leq p_{\max}; \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

dla pewnego $p_{\max} > 0$ oraz u z zakresu $|u| \leq u_{\max}$ (patrz Założenie 3).

Oznaczmy

$$W_{N_0} = (w_1, w_2, \dots, w_{N_0})^T, \quad \Phi_{N_0} = (\phi(u_1), \phi(u_2), \dots, \phi(u_{N_0}))^T, \quad \phi(u_k) = (f_1(u_k), f_2(u_k), \dots, f_m(u_k))^T.$$

Postać estymatora NK w etapie 2 jest następująca

$$\hat{c}_{N_0,M} = (\Phi_{N_0}^T \Phi_{N_0})^{-1} \Phi_{N_0}^T \widehat{W}_{N_0,M}, \quad (10)$$

gdzie Φ_{N_0} i $\widehat{W}_{N_0,M} = (\hat{w}_{1,M}, \hat{w}_{2,M}, \dots, \hat{w}_{N_0,M})^T$ pochodzą z Etapu 1. W pracy [15] udowodniono, że przy nieosobliwej macierzy $\Phi_{N_0}^T \Phi_{N_0}$ zachodzą następujące twierdzenia.

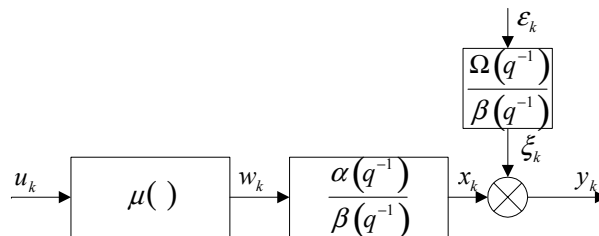
Twierdzenie 2: Jeśli dla $u \in \{0, u_n; n = 1, 2, \dots, N_0\}$ zachodzi zbieżność $\hat{R}_M(u) \rightarrow R(u)$ według prawdopodobieństwa, gdy $M \rightarrow \infty$ (Etap 1) to $\hat{c}_{N_0,M} \rightarrow c$ według prawdopodobieństwa, gdy $M \rightarrow \infty$ (Etap 2).

Twierdzenie 3: Jeśli w Etapie 1 $|\hat{R}_M(u) - R(u)| = O(M^{-\tau})$ według prawdopodobieństwa, gdy $M \rightarrow \infty$ dla każdego $u \in \{0, u_n; n = 1, 2, \dots, N_0\}$ to także $\|\hat{c}_{N_0,M} - c\| = O(M^{-\tau})$ według prawdopodobieństwa, gdy $M \rightarrow \infty$.

Uwaga 1: Wymaganie, aby $\text{rank} \Phi_{N_0} = m = \dim c$ może zostać łatwo spełnione ponieważ $f_1(u), \dots, f_m(u)$ są liniowo niezależne, zaś punkty estymacji u_n w Etapie 1 mogą zostać ustalone w dowolny sposób. Warunek jest automatycznie spełniony, gdy $N_0 \geq m$, u_1, u_2, \dots, u_{N_0} są różne, oraz $f_1(u), \dots, f_m(u)$ w (8) są układem Czebyszewa (tzn. spełniają warunek Haara). Przykładami mogą być $\{1, u, u^2, \dots, u^{m-1}\}$, $\{1, \sin u, \sin 2u, \dots, \sin(m-1)u\}$ (na przedziale $[0, 2\pi]$) lub $\{e^{\lambda_1 u}, e^{\lambda_2 u}, \dots, e^{\lambda_m u}\}$ [4].

IV. ESTYMACJA PARAMETRÓW LINIOWEGO OBIEKTU DYNAMICZNEGO TYPU IIR

Rozpatruje się przypadek z obiektem dynamicznym o nieskończonej odpowiedzi impulsowej, typu *ARMA* (Rys. 2).



Rys. 2. System Hammersteina z elementem liniowym typu *ARMA*.

Założenie 6: (lokalne) Liniowy obiekt dynamiczny jest typu *ARMA*(s,p) tzn. opisuje go następujące równanie różnicowe

$$x_k = \alpha_0 w_k + \dots + \alpha_s w_{k-s} + \beta_1 x_{k-1} + \dots + \beta_p x_{k-p}.$$

Ponieważ $x_k = y_k - \xi_k$, to

$$y_k = \vartheta_k^T \theta + z_k, \quad (11)$$

gdzie $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$ jest wektorem nieznanych parametrów ($p \geq s$), $\vartheta_k = (w_k, w_{k-1}, \dots, w_{k-s}, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-p})^T$, zaś zakłócenie $z_k = \xi_k - \beta_1 \xi_{k-1} - \dots - \beta_p \xi_{k-p}$ można przedstawić w postaci (2), przy $\xi_k = \frac{\Omega(q^{-1})}{\beta(q^{-1})} \varepsilon_k$, $\Omega(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i q^{-i}$ i $\beta(q^{-1}) = 1 - \beta_1 q^{-1} - \dots - \beta_p q^{-p}$ (tzn. ξ_k jest liniowym procesem ergodycznym o zerowej wartości oczekiwanej). Dla N pomiarów $\{(\vartheta_k, y_k)\}$ mamy $Y_N = \Theta_N \theta + Z_N$, gdzie $Y_N = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$, $\Theta_N = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N)^T$, $Z_N = (z_1, z_2, \dots, z_N)^T$. Zauważmy, że macierz Θ_N zawiera między innymi regresory $y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-p}$, które powodują asymptotyczne obciążenie estymatora najmniejszych kwadratów postaci $\hat{\theta}_N^{(LS)} = (\Theta_N^T \Theta_N)^{-1} \Theta_N^T Y_N$, przy skorelowanym zakłóceniu (patrz Założenie 4). Najpopularniejszym i najbardziej uniwersalnym sposobem pokonania tej trudności jest zastosowanie estymatora uzyskanego metodą zmiennych instrumentalnych [25]

$$\hat{\theta}_N^{(IV)} = (\Psi_N^T \Theta_N)^{-1} \Psi_N^T Y_N,$$

gdzie Ψ_N jest macierzą instrumentów

$$\Psi_N = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)^T, \quad \psi_k = (\psi_{k,1}, \psi_{k,2}, \dots, \psi_{k,s+p+1})^T,$$

dla której postulujemy spełnienie dwóch warunków

- (a) granica $Plim_{N \rightarrow \infty} (\Psi_N^T \Theta_N)$ istnieje i jest macierzą nieosobliwą;
- (b) $Plim_{N \rightarrow \infty} (\Psi_N^T Z_N) = 0$.

Przy spełnieniu warunków (a) i (b) błąd estymacji

$$\Delta_N^{(IV)} = \hat{\theta}_N^{(IV)} - \theta = \left(\frac{1}{N} \Psi_N^T \Phi_N \right)^{-1} \left(\frac{1}{N} \Psi_N^T Z_N \right) \quad (12)$$

zbiega do zera według prawdopodobieństwa, gdy $N \rightarrow \infty$ ([25], [27], [30]).

Zatem elementy Ψ_N powinny być koniecznie zależne od uogólnionych wejść i jednocześnie niezależne od zakłóceń. Standardowe metody generacji Ψ_N w identyfikacji liniowych obiektów dynamicznych opierają się na przesunięciach procesu pobudzającego [27], np.

$$\psi_k^{(std)} = (w_k, \dots, w_{k-s}, w_{k-s-1}, \dots, w_{k-s-p})^T.$$

Ponieważ w_k, \dots, w_{k-s-p} są nieznanne, proponuje się estymator hybrydowy

$$\hat{\theta}_{N,M}^{(IV)} = (\hat{\Psi}_{N,M}^T \hat{\Theta}_{N,M})^{-1} \hat{\Psi}_{N,M}^T Y_N, \quad (13)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_{N,M} &= (\hat{\vartheta}_{1,M}, \dots, \hat{\vartheta}_{N,M})^T, \quad \hat{\vartheta}_{k,M} = (\hat{w}_{k,M}, \dots, \hat{w}_{k-s,M}, y_{k-1}, \dots, y_{k-p})^T, \\ \hat{\Psi}_{N,M} &= (\hat{\psi}_{1,M}, \dots, \hat{\psi}_{N,M})^T, \quad \hat{\psi}_{k,M} = (\hat{w}_{k,M}, \dots, \hat{w}_{k-s,M}, \hat{w}_{k-s-1,M}, \dots, \hat{w}_{k-s-p,M})^T, \end{aligned}$$

a odpowiednie $\hat{w}_{k-r,M}$ wyznaczane są w oparciu o metodę nieparametryczną. Stosować można także wersję uproszczoną generacji zmiennych instrumentalnych

$$\tilde{\theta}_N^{(IV)} = (\tilde{\Psi}_N^T \tilde{\Theta}_N)^{-1} \tilde{\Psi}_N^T Y_N \quad (14)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_N &= (\tilde{\vartheta}_1, \tilde{\vartheta}_2, \dots, \tilde{\vartheta}_N)^T, \quad \tilde{\vartheta}_k = (\tilde{w}_k, \tilde{w}_{k-1}, \dots, \tilde{w}_{k-s}, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-p})^T, \quad \tilde{w}_k = \phi^T(u_k) \hat{c}_{N_0, M_0} \\ \tilde{\Psi}_N &= (\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \dots, \tilde{\psi}_N)^T, \quad \tilde{\psi}_k = (\tilde{w}_k, \tilde{w}_{k-1}, \dots, \tilde{w}_{k-s}, \tilde{w}_{k-s-1}, \tilde{w}_{k-s-2}, \dots, \tilde{w}_{k-s-p})^T \end{aligned}$$

Wyznaczenie $\tilde{\Psi}_N$ jest szybsze (rzędu $O(N)$), lecz traci się niezależność procedur identyfikacji obu podsystemów.

Zachodzą następujące twierdzenia (Dowody – patrz [16]).

Twierdzenie 4: Załóżmy, że warunki (a) i (b) są spełnione. Niech funkcja $\mu(u_{k-r})$ i funkcja gęstości prawdopodobieństwa sygnału wejściowego są ciągłe w punktach $u = 0$ oraz u_{k-r} (takich, że $w_{k-r} = \mu(u_{k-r})$ dla $k = 1, 2, \dots, N$ i

$r = 0, 1, \dots, s+p$) oraz asymptotyczny błąd estymacji nieperametrycznej ma własność $\left| \widehat{R}_M(u_{k-r}) - R(u_{k-r}) \right| = O(M^{-\tau})$ według prawdopodobieństwa, to

$$\widehat{\theta}_{N,M}^{(IV)} \rightarrow \theta \text{ według prawdopodobieństwa}$$

gdy $N, M \rightarrow \infty$, pod warunkiem, że $NM^{-\tau} \rightarrow 0$.

Twierdzenie 5: Dla $M \sim N^{(1+\alpha)/\tau}$, $\alpha > 0$, asymptotyczny rząd szybkości zbieżności wynosi

$$\left\| \widehat{\theta}_{N,M}^{(IV)} - \theta \right\| = O(N^{-\min(\frac{1}{2}, \alpha)}) \text{ według prawdopodobieństwa.}$$

Twierdzenie 6: Wskaźnik jakości zmiennych instrumentalnych

$$Q(\Psi_N) \triangleq \max_{\|Z_N^*\|_2 \leq 1} \left\| \Delta_N^{(IV)}(\Psi_N) \right\|_2^2$$

osiąga swoje dolne ograniczenie dla

$$\Psi_N^* = (\psi_1^*, \psi_2^*, \dots, \psi_N^*)^T, \quad \psi_k^* = (w_k, w_{k-1}, \dots, w_{k-s}, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-p})^T,$$

gdzie $x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-p}$ są wyjściami systemu wolnymi od zakłóceń (patrz Rys. 2), tzn. dla wszystkich dopuszczalnych Ψ_N zachodzi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q(\Psi_N^*) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} Q(\Psi_N) \quad \text{z prawdopodobieństwem 1.}$$

V. BADANIA KOMPUTEROWE

Symulowano system Hammersteina przyjmując następujące nastawy

$$\begin{aligned} \theta &= \left(1, \frac{1}{2}\right)^T, & c^* &= 1, & \mu(u, c^*) &= e^{c^* u} = e^u \\ u_k &\sim U(-10, 10), & z_k &= \frac{1}{2}z_{k-1} + \varepsilon_k, & \varepsilon_k &\sim U(-2, 2) \end{aligned}$$

Ponieważ c^* jest skalarem, przyjęto $N_0 = 1$ oraz $u_1 = 1$. W etapie 1 procedury zastosowano estymator jądrowy z jądrem Gaussa, zaś w etapie 2 metodą Levenberga-Marquardta minimalizowano funkcję strat postaci

$$Q_{N_0}(c) = \left(e^{c^* u_1} - e^{c u_1} \right)^2, \quad \text{w wersji empirycznej } \widehat{Q}_{N_0, M}(c) = \left(\widehat{w}_{1, M} - e^{c u_1} \right)^2$$

o gradientie i hessianie, odpowiednio równym

$$\nabla_c = \frac{\partial Q_{N_0}(c)}{\partial c} = 2(e^c - e)e^c \quad \text{i} \quad H_c = \frac{\partial^2 Q_{N_0}(c)}{\partial c^2} = 4e^{2c} - 2e^{c+1} = 2e^c(2e^c - e)$$

Obszar wypukłości $Q_{N_0}(c)$ (dodatni hessian), zawierający punkty startowe gwarantujące zbieżność procedury Marquardta-Levenberga jest następujący

$$\widehat{c}_{N_0=1, M}^{(0)} \in \left(\ln \frac{e}{2}, \infty \right)$$

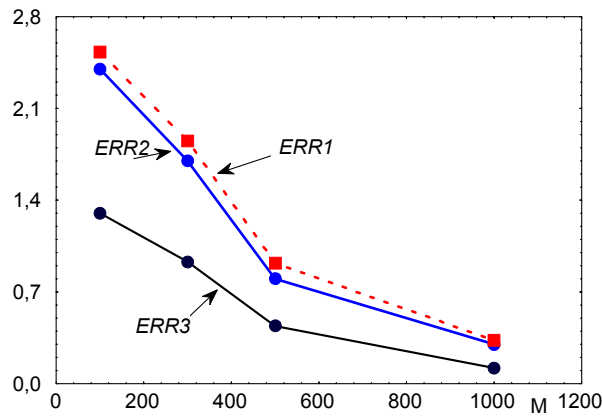
Ustalono parametry startowe $\lambda_0 = 1/1024$ i $\nu = 8$. Uzyskano następujące eksperymentalne wartości błędów $\Delta_c(M) = \|\widehat{c}_{N_0, M} - c^*\|^2$ w zależności od M

$$\Delta_c(M = 100) = 0.180, \quad \Delta_c(M = 500) = 0.035, \quad \Delta_c(M = 1000) = 0.009$$

W estymacji podsystemu liniowego porównano estymatory ze zmiennymi pomocniczymi (13) i (14) z metodą optymalną zakładającą znajomość niezakłóconych wyjść, dla $\alpha = 0.1$ ($M = \frac{1}{10}N^{2.75}$). Przebieg błędów

$$ERR1(N) = \left\| \widehat{\theta}_N(\widetilde{\Psi}_N) - \theta \right\|_2, \quad ERR2(N) = \left\| \widehat{\theta}_{N, M}(\widehat{\Psi}_{N, M}) - \theta \right\|_2, \quad ERR3(N) = \left\| \widehat{\theta}_{N, M}^*(\Psi_{N, M}^*) - \theta \right\|_2$$

pokazano na Rys. 3.



Rys. 3. Błąd estymacji parametrów obiektu liniowego dla różnych metod generacji zmiennych instrumentalnych.

LITERATURA

- [1] E. W. Bai, "An optimal two-stage identification algorithm for Hammerstein-Wiener nonlinear systems," *Automatica*, vol. 34, no. 3, pp. 333-338, 1998.
- [2] S. A. Billings, S. Y. Fakhouri, "Identification of systems containing linear dynamic and static nonlinear elements," *Automatica*, vol. 18, no. 1, pp. 15-26, 1982.
- [3] S. Brandt, "Analiza danych: metody statystyczne i obliczeniowe", PWN, Warszawa, 2002.
- [4] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, AMS Chelsea Publishing, Rhode Island, 1982.
- [5] J. A. Cristobal, P. F. Roca, W. G. Manteiga, "A class of linear regression parameter estimators constructed by nonparametric estimation," *The Annals of Statistics*, vol. 15, no. 2, pp. 603-609, 1987.
- [6] S. Efromovich, *Nonparametric Curve Estimation*, Springer, New York, 1999.
- [7] B. Finigan, I. Rowe, "Strongly consistent parameter estimation by the introduction of strong instrumental variables", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.19, pp. 825-830, 1974.
- [8] W. Greblicki, "Nonparametric orthogonal series identification of Hammerstein systems," *International Journal of System Science*, vol. 20, pp. 2355-2367, 1989.
- [9] W. Greblicki, M. Pawlak, "Identification of discrete Hammerstein systems using kernel regression estimates," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 31, pp. 74-77, 1986.
- [10] W. Greblicki, M. Pawlak, "Cascade non-linear system identification by a non-parametric method," *International Journal of System Science*, vol. 25, pp. 129-153, 1994.
- [11] R. Haber, L. Keviczky, *Nonlinear System Identification: Input-Output Modeling Approach*, Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [12] N. D. Haist, F. H. Chang, R. Luus, "Nonlinear identification in the presence of correlated noise using Hammerstein model," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 18, pp. 552-555, 1973.
- [13] Z. Hasiewicz, G. Mzyk, "Parametryczno-nieparametryczna identyfikacja systemów nieliniowych o strukturze blokowej", *XIV Krajowa Konferencja Automatyki*, Zielona Góra, 2002.
- [14] Z. Hasiewicz, G. Mzyk, "Two-stage identification of Hammerstein systems", *Proceedings of the 9th IEEE International Conference MMAR*, Międzyzdroje 2003.
- [15] Z. Hasiewicz, G. Mzyk, "Combined parametric-nonparametric identification of Hammerstein systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, pp. 1370-1376, 2004.
- [16] Z. Hasiewicz, G. Mzyk, "Nonparametric instrumental variables for Hammerstein system identification", submitted for publication in the *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [17] W. Härdle, *Applied Nonparametric Regression*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [18] G. Mzyk, "Zastosowanie metody zmiennej pomocniczej do identyfikacji systemów o złożonej strukturze", *XIII Krajowa Konferencja Automatyki*, Opole, 1999.
- [19] G. Mzyk, "Application of instrumental variable method to the identification of Hammerstein-Wiener systems", *Proceedings of the 6th International Conference MMAR 2000*, Międzyzdroje, 2000.
- [20] G. Mzyk, "Zastosowanie metody zmiennych instrumentalnych do identyfikacji systemów Hammersteina-Wienera", *Pomiary Automatyka Kontrola*, Nr 7/8, str. 35-40, 2001.
- [21] G. Mzyk, "Identification of nonlinear systems with correlated input", *Proceedings of the 7th IEEE International Conference MMAR 2001*, Międzyzdroje, 2001.
- [22] G. Mzyk, "Kernel instrumental variables for Hammerstein system identification", *Proceedings of the 9th IEEE International Conference MMAR 2004*, Międzyzdroje, 2004.
- [23] K. S. Narendra, P. G. Gallman, "An iterative method for the identification of nonlinear systems using the Hammerstein model," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, pp. 546-550, 1966.
- [24] T. Söderström, P. Stoica, "Instrumental-variable methods for identification of Hammerstein system", *International Journal of Control*, vol. 35, No. 3, pp. 459-476, 1982.
- [25] T. Söderström, P. Stoica, *System Identification*, NJ: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [26] P. Stoica, T. Söderström, "Comments on the Wong and Polak minimax approach to accuracy optimization of instrumental variable methods", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 27, pp. 1138-1139, 1982.
- [27] P. Stoica, T. Söderström, "Instrumental variable methods for system identification", *Circuits Systems Signal Processing*, vol. 21, No. 1, pp. 1-9, 2002.
- [28] M. P. Wand, H. C. Jones, *Kernel Smoothing*, Chapman and Hall, London, 1995.
- [29] R. Ward, "Notes on the instrumental variable method", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, pp. 482-484, 1977.
- [30] K. Wong, E. Polak, "Identification of linear discrete time systems using the instrumental variable method", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-12, No. 6, pp. 707-718, 1967.