Złożone systemy sterowania
Optymalizacja dwupoziomowa z dokompozycją i koordynacją

Grzegorz Mzyk

Politechnika Wrocławska, Wydział Elektroniki

January 10, 2017

Zadania związane

- zadanie pierwotne

znaleźć $\widehat{u} \in U$:

$$Q(\widehat{u}) \geq Q(u) \tag{1}$$

dla każdego $u \in U$, gdzie U jest zbiorem wartości dopuszczalnych
u – wektor zmiennych decyzyjnych (sterowań)

- zadanie związane (ozn.)
  znaleźć $\widehat{w} \in W$:
  $$P(\widehat{w}) \geq P(w) \tag{2}$$
  dla kazdego $w \in W$

Zadania związane

Użycie rozwiązania zadania (2) do okreslenia rozwiązania zadania (1) jest możliwe gdy:

- rozwiązanie $\widehat{w}$ zadania (2) istnieje $\Leftrightarrow$ istnieje rozwiązanie $\widehat{u}$ zadania (1)
- istnieje odwzorowanie $\varphi : W \rightarrow U$, takie że $\widehat{u} = \varphi(\widehat{w})$

Zbiory douszczalne

$$U = \{u : g'(u) \leq 0, g''(u) = 0\}$$

$$W = \{w : h'(w) \leq 0, h''(w) = 0\}$$

Twierdzenie

Jeżeli

$$h' = g' \circ \varphi \qquad h'' = g'' \circ \varphi \qquad P = Q \circ \varphi$$

to zadanie (2) jest związane z zadaniem (1) oraz $\widehat{u} = \varphi(\widehat{w})$.

Dekompozycja

$$P(w) \to \max_{w} \qquad w = (v, m)$$

$$\max_{w} P(w) = \max_{v,m} P(v, m) = \max_{v} \left[\max_{m} P(v, m) \right]$$

optymalizacja w [] odbywa się przy ustalonym v (zadanym z góry)

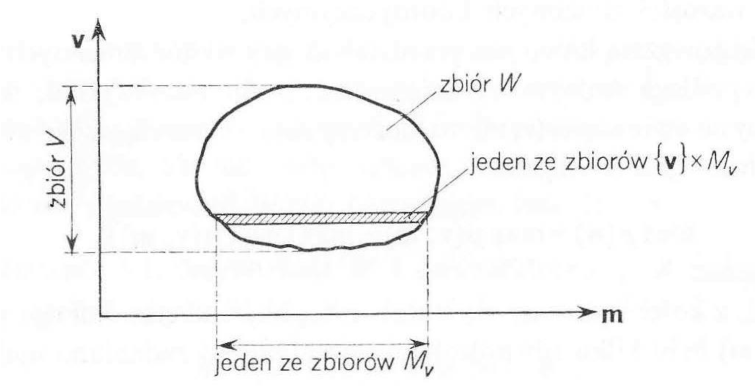
v - zmienne decyzyjne górnego poziomu, tzw. *zmienne koordynujace*

odpowiedni dobór zm. v – tzw. *koordynacja*

Na poziomie dolnym staramy się dokonać dekompozycji

$$m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$$

i rozwiązywać zadania częściowe równolegle.

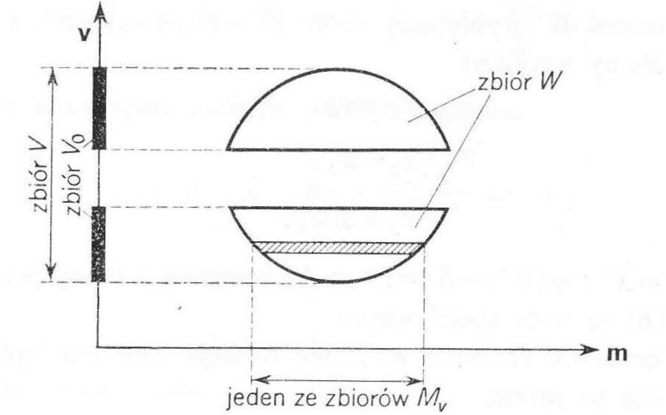


Zbiór dopuszczalny

Zadanie dolnego poziomu

dla danego $v \in V$ znaleźć $\widehat{m}(v) \in M_v$ takie że dla każdego $m \in M_v$ zachodzi

$$P(v, \widehat{m}(v)) \geq P(v, m)$$



Zbiór dopuszczalny

Zadanie górnego poziomu

znaleźć $\widehat{v} \in V_0$ takie że dla każdego $v \in V_0$ zachodzi

$$P(\widehat{v}, \widehat{m}(\widehat{v})) \geq P(v, \widehat{m}(v))$$

Przykład

zminimalizować funkcję

$$Q(u) = (u_1 - 4)^2 + (u_2 - 4)^2 \to \min_u$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} g_1(u) &= u_1^2 + u_2^2 - \alpha^2 e^{2u_3} \leq 0 \\ g_2(u) &= |u_3| - 1 \leq 0 \\ |\alpha| &\leq 1 \end{aligned}$$

konstrukcja zadania związanego
funkcja φ

$$
\begin{aligned}
u_1 &= w_2 \\
u_2 &= w3 \\
u_3 &= \ln w_1
\end{aligned}
$$

złożenie $P = Q \circ \varphi$

$$P(w) = (w_2 - 4)^2 + (w_3 - 4)^2$$

ograniczenia

$$\begin{aligned} h_1(w) &= w_2^2 + w_3^2 - \alpha^2 w_1^2 \leq 0 \\ h_2(w) &= |\ln w_1| - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

rozbicie problemu na dwa poziomy

$$v = w_1 \qquad m_1 = w_2 \qquad m_2 = w_3$$

zbiory dopuszczalne

$$\begin{aligned} V &= \left\{ v : \frac{1}{e} \le v \le e \right\} \\ M_v &= \left\{ m : m_1^2 + m_2^2 \le \alpha^2 v^2 \right\} \end{aligned}$$

zadanie dolnego poziomu

$$P(v, m_1, m_2) = (m_1 - 4)^2 + (m_2 - 4)^2 \to \min_{m_1, m_2}$$

przy ograniczeniu

$$m_1^2 + m_2^2 \leq \alpha^2 v^2$$

rozwiązanie

$$\widehat{m}_1(v) = \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha v \qquad \widehat{m}_2(v) = \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha v$$

zadanie górnego poziomu

$$\min_{v} P\left(v, \widehat{m}(v)\right) = \min_{v} 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha v - 4\right)^2$$

przy ograniczeniu

$$\frac{1}{e} \leq v \leq e$$

rozwiązanie

$$\widehat{v} = e$$

powrót do zadania pierwotnego

$$
\begin{aligned}
\widehat{u} &= \varphi\left(\widehat{w}\right) \\
u_1 &= \widehat{m}_1\left(\widehat{v}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha e \\
u_2 &= \widehat{m}_2\left(\widehat{v}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha e \\
u_3 &= \ln \widehat{v} = 1
\end{aligned}
$$

Literatura

[1] Findeisen, W., Bailey, F.N., Brdyś, M., Malinowski, K., Tatjewski, P.,Woźniak, A.: *Control and Coordination in Hierarchical Systems*. J. Wiley, Chichester (1980)

[2] Findeisen, W., *Wielopoziomowe układy sterowania*, PWN, Warszawa (1974)