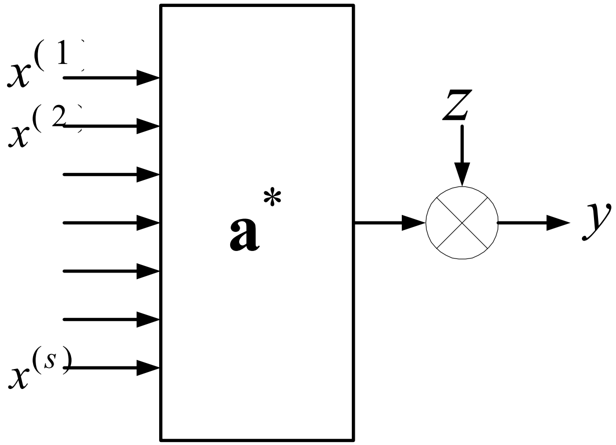
1. Przedmiot identyfikacji

System



$$y = F^*(\mathbf{x}, z) = F(\mathbf{x}, z, \mathbf{a}^*), \text{ gdzie } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(s)} \end{bmatrix} \text{ – mierzone, } \mathbf{a}^* = \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_s^* \end{bmatrix} \text{ – zestaw współczynników konkretyzujących } F()$$

$F()$ – znane, $\mathbf{a}^*$ – nieznane

informacja aprioryczna

$$F^* \in \{F(\mathbf{x}, z, \mathbf{a}); \ \mathbf{a} \in R^s\}$$

istnieje dokładnie jedno $\mathbf{a}^*$, takie że $F^*(\mathbf{x}, z) = F(\mathbf{x}, z, \mathbf{a}^*)$ dla każdej pary $(\mathbf{x}, z)$ (**identyfikowalność**)

informacja pomiarowa

$$\{\mathbf{x}_k, y_k\}_{k=1}^N$$

cel

znaleźć przepis $\Psi()$ (algorytm identyfikacji)

$$\Psi(\text{inf . aprioryczna, inf. pomiarowa}) = \mathbf{a}_N \sim \mathbf{a}^*$$

założenia o zakłóceniach

$$
\begin{aligned}
\text{jest addytywne, tj. } y &= F(\mathbf{x}, \mathbf{a}^*) + z \\
& \quad \{z_k\}_{k=1}^{N} \text{ – ciąg i.i.d.} \\
\mathbf{E}z &= 0 \\
var z &< \infty \\
& \quad z, \mathbf{x} \text{ – niezależne}
\end{aligned}
$$

natura procesów

$$z \text{ – losowe, } \mathbf{x} \text{ – deterministyczne lub losowe, } y \text{ –losowe, } \mathbf{a}_N \text{ –losowe}$$

własności $\mathbf{a}_N$

– praktyczne: wartości $\mathbf{E}\mathbf{a}_N[i]$ i $var\mathbf{a}_N[i]$

– asymptotyczne: fakt i typ zbieżności $\mathbf{a}_N \to \mathbf{a}^*$

2. Metoda najmniejszych kwadratów (Gauss 1809)

wskaźnik teoretyczny oceniający jakość dopasowania

$$Q_J(\mathbf{a}) = \mathbf{E}\{y - F(\mathbf{x}, \mathbf{a})\}^2 \to \min_{\mathbf{a}}$$

$$
\begin{aligned}
Q_J(\mathbf{a}) &= \mathbf{E}\{F(\mathbf{x}, \mathbf{a}^*) + z - F(\mathbf{x}, \mathbf{a})\}^2 = \mathbf{E}\{[F(\mathbf{x}, \mathbf{a}^*) - F(\mathbf{x}, \mathbf{a})]^2 + 2[F(\mathbf{x}, \mathbf{a}^*) - F(\mathbf{x}, \mathbf{a})]z + z^2\} = \\
&= \mathbf{E}\{F(\mathbf{x}, \mathbf{a}^*) - F(\mathbf{x}, \mathbf{a})\}^2 + var z
\end{aligned}
$$

konkluzja

$$\mathbf{a}^* = \arg\min_{\mathbf{a}} Q_J(\mathbf{a})$$

w praktyce nie jest możliwe obliczenie $Q_J(\mathbf{a})$ (brak znajomości odpowiednich rozkładów), proponuje się estymację wartości oczekiwanej za pomocą wartości średniej

$$\widehat{Q}_{J,N}(\mathbf{a}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \{y_k - F(\mathbf{x}_k, \mathbf{a})\}^2 \to \min_{\mathbf{a}}$$

uśredniane składniki $\{y_k - F(\mathbf{x}_k, \mathbf{a})\}^2$ tworzą ciąg i.i.d., zatem na podstawie *MPWL*

$$\widehat{Q}_{J,N}(\mathbf{a}) \stackrel{p.1}{\to} Q_J(\mathbf{a}), \text{ gdy } N \to \infty$$

pytanie: czy prawdziwe jest następujące wnioskowanie

$$\widehat{Q}_{J,N}(\mathbf{a}) \stackrel{p.1}{\to} Q_J(\mathbf{a}) \Longrightarrow \arg\min_{\mathbf{a}} \widehat{Q}_{J,N}(\mathbf{a}) \stackrel{p.1}{\to} \arg\min_{\mathbf{a}} Q_J(\mathbf{a})$$

odpowiedź: tylko wtedy, gdy

$$\sup_{\mathbf{a}}(\widehat{Q}_{J,N}(\mathbf{a}) - Q_J(\mathbf{a})) \stackrel{p.1}{\to} 0$$

3. Liniowy system statyczny *MIMO*

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{a}^{*T}\mathbf{x} + z = \mathbf{x}^T\mathbf{a}^* + z \\ y_k &= \mathbf{x}_k^T\mathbf{a}^* + z_k, \qquad k = 1, 2, ..., N \end{aligned}$$

opis macierzowo–wektorowy

$$X_N = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & .. & x_1^{(s)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & .. & x_2^{(s)} \\ .. & .. & .. & .. \\ x_N^{(1)} & x_N^{(2)} & .. & x_N^{(s)} \end{bmatrix}, \qquad Y_N = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \qquad Z_N = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}$$

równanie pomiarów

$$Y_N = X_N\mathbf{a}^* + Z_N$$

wektor wyjść modelu

$$\overline{Y}_N = X_N\mathbf{a}$$

empiryczne kryterium jakości

$$\begin{aligned}\overline{Q}_{J,N}(\mathbf{a}) &= \sum_{k=1}^{N}\{y_k - \mathbf{x}_k^T\mathbf{a}\}^2 = (Y_N - X_N\mathbf{a})^T(Y_N - X_N\mathbf{a}) = \|Y_N - X_N\mathbf{a}\|_2^2 = \ldots \text{ – kwadrat normy euklidesowej} \\ \ldots &= (Y_N^T - \mathbf{a}^T X_N^T)(Y_N - X_N\mathbf{a}) = Y_N^T Y_N - \mathbf{a}^T X_N^T Y_N - Y_N^T X_N\mathbf{a} + \mathbf{a}^2 X_N^T X_N \to \min_{\mathbf{a}}\end{aligned}$$

gradient

$$\nabla_{\mathbf{a}}\overline{Q}_{J,N}(\mathbf{a}) = -2X_N^T Y_N + 2X_N^T X_N\mathbf{a} = 0$$

równanie normalne

$$X_N^T X_N\mathbf{a} = X_N^T Y_N$$

$\dim X_N^T X_N = s \times s$, $\dim X_N^T Y_N = s \times 1$, $\dim \mathbf{a} = s \times 1$

- kwestia isnienia rozwiązania

$$\text{lin}col X_N^T X_N = \text{lin}col X_N^T$$

- kwestia jednoznaczności rozwiązania

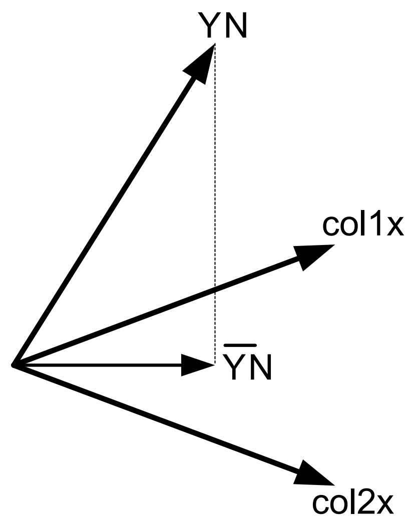
$$\begin{aligned}\det X_N^T X_N &> 0 \qquad (\neq 0) \\ \text{inaczej } rank X_N^T X_N &= s \text{ (nieosobliwa)}\end{aligned}$$

Fakt: $rank X_N^T X_N = rank X_N^T = rank X_N$.
Warunek jednoznaczności: $rank X_N = s$

1) $N \geqslant s$ – dostatecznie dużo pomiarów (warunek konieczny, ale nie wystarczający)
2) wśród N pomiarów musi się znaleźć s niezeleżnych liniowo wektorów
Gdy $rank X_N < s$, wtedy rozwiązanie równania normalnego nie jest jednoznaczne.

- kwestia nazwy równania (normalność-prostopadłość)

$$
\begin{aligned}
X_N^T(Y_N - X_N\mathbf{a}) &= 0 \\
X_N^T(Y_N - \overline{Y}_N) &= 0, \text{ gdzie } \overline{Y}_N \text{ – wyjście modelu o parametrach } \mathbf{a} \\
X_N^T &= [col_1x, col_2x, ..., col_sx] \\
\overline{Y}_N &= a_1col_1x + a_2col_2x + ... + a_scol_sx \text{ – liniowa kombinacja wektorów kolumnowych} \\
\text{wniosek} &: \ \overline{Y}_N \in \mathrm{lin}colX_N^T \\
\text{natomiast w ogólności} &: \ Y_N \notin \mathrm{lin}colX_N^T
\end{aligned}
$$



$$X_N^T(Y_N - \overline{Y}_N) = 0 \Rightarrow (col_xi)^T(Y_N - \overline{Y}_N) = 0 \text{ dla każdego } i = 1, 2, ..., s$$

wniosek: wektor różnicy $Y_N - \overline{Y}_N$ jest prostopadły do każdej z kolumn col_xi (rzut prostopadły jest "najkrótszy")

4. Własności asymptotyczne estymatora NK – wejście losowe

$$\mathbf{a}_N = \left(X_N^T X_N\right)^{-1} X_N^T Y_N$$

$\{x_k^{(i)}\}$, $\{z_k\}$ – dwa niezależne od siebie ciągi losowe typu i.i.d., $\mathbf{E}z_k = 0$

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{x}^T \mathbf{a}^* + z \\ \mathbf{x}y &= \mathbf{x}\mathbf{x}^T \mathbf{a}^* + \mathbf{x}z \\ \mathbf{E}\mathbf{x}y &= (\mathbf{E}\mathbf{x}\mathbf{x}^T)\mathbf{a}^* + \mathbf{E}\mathbf{x}z \\ \text{prawdziwe } \mathbf{a}^* &= (\mathbf{E}\mathbf{x}\mathbf{x}^T)^{-1}\mathbf{E}\mathbf{x}y, \qquad \text{macierz } \mathbf{E}\mathbf{x}\mathbf{x}^T \text{ musi być nieosobliwa (wymaganie dot. rozkładów)} \end{aligned}$$

korzystając z alternatywnych postaci

$$X_N^T X_N = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T, \qquad X_N^T Y_N = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k y_k \qquad \text{(wyprowadzić!)}$$

estymator NK można zapisać następująco

$$\mathbf{a}_N = \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T\right)^{-1} \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k y_k\right)$$

elementy $\{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T\}$ są ciągami typu i.i.d. (stac.)
$\mathbf{E}\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T = \mathbf{E}\mathbf{x}\mathbf{x}^T$ – dla każdego $k = 1, 2, ..., N$
wniosek

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T \stackrel{p.1}{\to} \mathbf{E}\mathbf{x}\mathbf{x}^T, \text{ gdy } N \to \infty$$

a ponieważ odwracanie macierzy jest operacją ciągłą, to

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T\right)^{-1} \stackrel{p.1}{\to} \left(\mathbf{E}\mathbf{x}\mathbf{x}^T\right)^{-1}, \text{ gdy } N \to \infty \qquad (1)$$

elementy $\{\mathbf{x}_k y_k\}$ są ciągami typu i.i.d. (stac.)

$\mathbf{E}\mathbf{x}_k y_k = \mathbf{E}\mathbf{x}y$ – dla każdego $k = 1, 2, ..., N$

wniosek

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k y_k \xrightarrow{p.1} \mathbf{E}\mathbf{x}y, \text{ gdy } N \to \infty \tag{2}$$

zatem na podstawie (1) i (2)

$$\mathbf{a}_N \xrightarrow{p.1} \mathbf{a}^*, \text{ gdy } N \to \infty$$

Przy losowym pobudzeniu i powziętych założeniach, $\mathbf{a}_N$ jest estymatorem **mocno zgodnym** parametrów $\mathbf{a}^*$

5. Własności asymptotyczne estymatora NK – wejście deterministyczne

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_N &= \left(X_N^T X_N\right)^{-1} X_N^T Y_N = \left(X_N^T X_N\right)^{-1} X_N^T (X_N \mathbf{a}^* + Z_N) = \mathbf{a}^* + \left(\frac{1}{N} X_N^T X_N\right)^{-1} \left(\frac{1}{N} X_N^T Z_N\right) = \\ &= \mathbf{a}^* + \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T\right)^{-1} \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k z_k\right)\end{aligned}$$

1) czynnik $\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T\right)^{-1}$ jest czysto deterministyczny

2) $\{\mathbf{x}_k z_k\}$ – niezależne (nie muszą być typu i.i.d.)

3) $\mathbf{E}\mathbf{x}_k z_k = \mathbf{x}_k \mathbf{E} z_k = 0$, dla każdego k

4) dodatkowy warunek dotyczący deterministycznego wejścia (patrz II wersja MPWL)

$$var \mathbf{x}_k^{(i)} z_k = [\mathbf{x}_k^{(i)}]^2 var z_k = [\mathbf{x}_k^{(i)}]^2 \sigma_z^2 < \infty$$

Jeżeli dodatkowo

$$\sigma_z^2 \sum_{k=1}^{N} \frac{[\mathbf{x}_k^{(i)}]^2}{k^2} < \infty, \text{ dla każdego } i = 1, 2, ..., s$$

to

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k z_k \overset{p.1}{\to} 0, \text{ gdy } N \to \infty$$

Przykład ograniczonego wejścia deterministycznego

$$\left|\mathbf{x}^{(i)}\right| \leqslant d_i$$

tj.

$$\mathbf{x} \in [-d_1, d_1] \times [-d_2, d_2] \times ... \times [-d_s, d_s] \text{ – wielowymiarowy przedział}$$

6. Własności estymatora NK dla $N < \infty$

analiza obciążenie

$$\begin{aligned}
\text{oznaczając } L_N &= \left(X_N^T X_N\right)^{-1} X_N^T \text{ otrzymujemy } \mathbf{a}_N = L_N Y_N \text{ (estymator } \mathbf{liniowy}) \\
\mathbf{a}_N &= L_N Y_N = L_N (X_N \mathbf{a}^* + Z_N) = \mathbf{a}^* + L_N Z_N \\
\mathbf{E}\mathbf{a}_N &= \mathbf{a}^* + \mathbf{E}\{L_N\}\,\mathbf{E}\{Z_N\} = \mathbf{a}^*
\end{aligned}$$

wniosek: $\mathbf{a}_N$ jest nieobciążony zarówno dla wejścia losowego, jak i deterministycznego

analiza macierzy kowariancji

$$\begin{aligned}
cov(\mathbf{a}_N) &= \mathbf{E}\left\{(\mathbf{a}_N - \mathbf{a}^*)(\mathbf{a}_N - \mathbf{a}^*)^T\right\} \\
\mathbf{a}_N - \mathbf{a}^* &= L_N Z_N \\
cov(\mathbf{a}_N) &= \mathbf{E}\left\{L_N Z_N Z_N^T L_N^T\right\} = L_N \left(\mathbf{E} Z_N Z_N^T\right) L_N^T
\end{aligned}$$

struktura macierzy kowariancji zakłóceń $\mathbf{E} Z_N Z_N^T$ jest następująca

$$\mathbf{E} Z_N Z_N^T = \begin{bmatrix} \mathbf{E} z_1^2 & \mathbf{E} z_1 z_2 & .. & \mathbf{E} z_1 z_N \\ \mathbf{E} z_2 z_1 & \mathbf{E} z_2^2 & .. & : \\ : & : & : & : \\ \mathbf{E} z_N z_1 & .. & .. & \mathbf{E} z_N^2 \end{bmatrix} = \sigma_z^2 I$$

zatem

$$cov(\mathbf{a}_N) = \sigma_z^2 L_N L_N^T$$

postać macierzy $L_N L_N^T$

$$L_N L_N^T = \left(X_N^T X_N\right)^{-1} X_N^T X_N \left(X_N^T X_N\right)^{-1} = \left(X_N^T X_N\right)^{-1}$$

wniosek

$$cov(\mathbf{a}_N) = \sigma_z^2 \left(X_N^T X_N \right)^{-1}$$

planowanie ortogonalne
gdy $X_N^T X_N$ jest macierzą diagonalną (eksperyment czynny – wejście deterministyczne)

6.1. Optumalność $\mathbf{a}_N$ w klasie estymatorów LUE

klasa LUE

$$\{\alpha_N : \alpha_N = M_N Y_N, \quad \mathbf{E}\alpha_N = \mathbf{a}^*, \quad M_N \text{ – deterministyczna}\}$$

wartość oczekiwana

$$\mathbf{E}\alpha_N = \mathbf{E}M_N Y_N = \mathbf{E}M_N X_N \mathbf{a}^* + \mathbf{E}M_N Z_N \text{ wniosek: } M_N X_N = I$$

macierz kowariancji

$$\begin{aligned} cov(\alpha_N) &= \mathbf{E}\left\{ M_N Z_N Z_N^T M_N^T \right\} = M_N \left(\mathbf{E} Z_N Z_N^T \right) M_N^T \\ cov(\alpha_N) &= \sigma_z^2 M_N M_N^T \end{aligned}$$

pokażemy, że

$$cov(\mathbf{a}_N) \leqslant cov(\alpha_N)$$

co oznacza znak $\leqslant$ w odniesieniu do macierzy?

Definicja 1 *Macierz $A \in R^{n,n}$ jest nieujemnie określona (zapisujemy $A \geqslant 0$), jeśli dla każdego wektora $w = R^n$ zachodzi*

$$w^T A w \geqslant 0$$

Twierdzenie 1 *Macierz postaci AA^T jest zawsze nieujemenie określona.*

podstawmy $A = M_N - L_N$

$$(M_N - L_N)(M_N - L_N)^T = (M_N - L_N)(M_N^T - L_N^T) = M_N M_N^T - M_N L_N^T - L_N M_N^T + L_N L_N^T = (***)$$

spostrzeżenia

$$\begin{aligned} M_N L_N^T &= M_N X_N \left(X_N^T X_N\right)^{-1} = I \left(X_N^T X_N\right)^{-1} = \left(X_N^T X_N\right)^{-1} = L_N L_N^T \\ L_N M_N^T &= (M_N L_N^T)^T = L_N L_N^T \end{aligned}$$

zatem

$$(***) = M_N M_N^T - L_N L_N^T$$

zaś na podstawie Twierdzenia

$$\begin{aligned} M_N M_N^T - L_N L_N^T &\geqslant 0 \qquad / \cdot \sigma_z^2 \\ cov(\alpha_N) - cov(\mathbf{a}_N) &\geqslant 0 \end{aligned}$$