

## 1. Jak uzyskać liczby pseudolosowe za pomocą komputera? [Zieliński]

nieliniowe sprzężenie zwrotne

$$x_k = \mathcal{F}(x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-q})$$

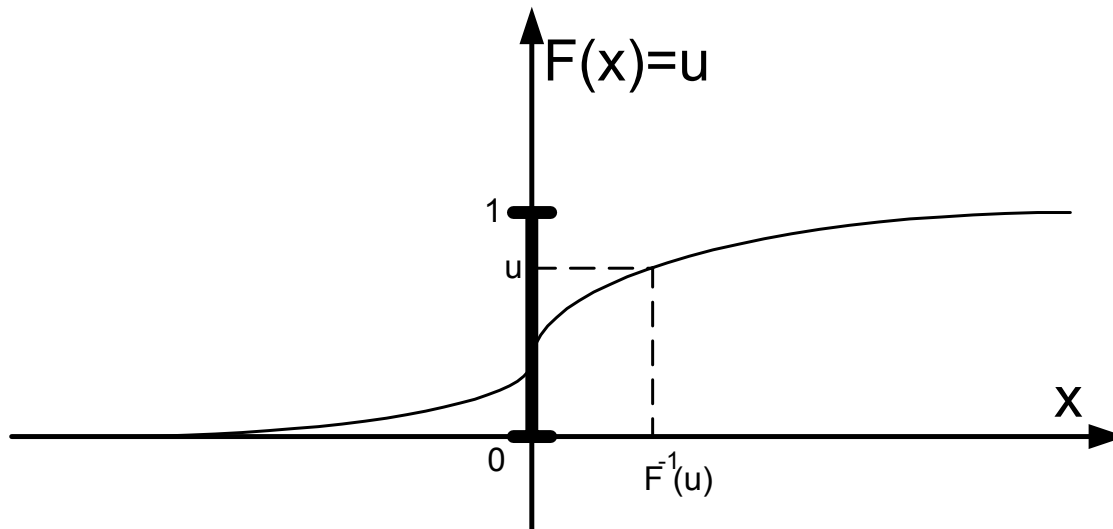
Postulaty dotyczące  $\mathcal{F}$ :

- 1) powinna gwarantować jak największy okres ciągu  $\{x_k\}$  (często opiera się ona na operacji wyznaczania reszty z dzielenia)
- 2) powinna gwarantować w miarę regularny rozkład wartości  $x_k$

## 2. Metoda odwracania dystrybuanty (tzw. inwersyjna)

**Założenie i cel:**

- dysponujemy dobrym generatorem realizacji zmiennej losowej o rozkładzie  $\mathcal{U}[0, 1]$
- chcemy zaprojektować generator realizacji zmiennej losowej  $X$ , o funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $f(x)$ , której dystrybuanta  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$  jest ściśle monotoniczna (tj. ściśle rosnąca)



Wtedy  $F^{-1}()$  istnieje i jest dobrze określona – odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne

$$\begin{aligned}u &= F(x), & u &\in [0, 1] \\x &= F^{-1}(u), & x &\in R\end{aligned}$$

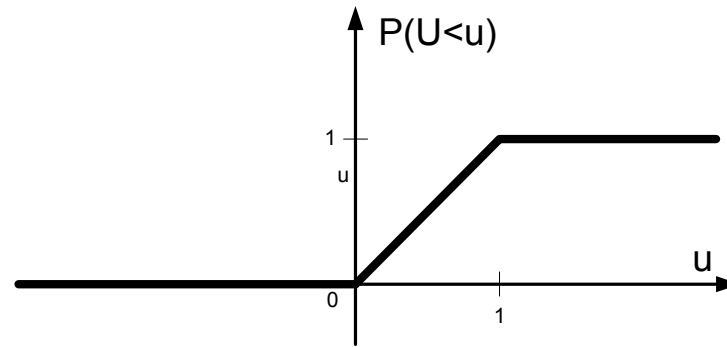
odcinek  $[0, 1]$  jest uprzywilejowany ze względu na definicję dystrybuanty

### Lemat 1

Jeżeli  $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$ , to zmienna losowa  $X = F^{-1}(U)$  ma dystrybuantę  $F(X)$  (czyli gęstość  $f(x)$ ).

### Dowód

$$P\{X \leq x\} = P\{F^{-1}(U) \leq x\} = P\{U \leq F(x)\} = (\dots)$$



$$(\dots) = F(x)$$

### Lemat 2

Jeżeli  $X \sim F(x)$ , to zmienna losowa  $U = F(X) \sim \mathcal{U}[0, 1]$ .

### Dowód

$$P(U \leq u) = P(F(X) \leq u) = P(X \leq F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u$$

### Schemat metody

1) weź dobry generator  $\mathcal{U}[0, 1]$

2) dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa (konstruowanego generatora)  $f(x)$  wyznacz dystrybuantę  $F()$  i wzór na jej odwrotność  $F^{-1}()$

3) wylosuj  $u \sim \mathcal{U}[0, 1]$  i oblicz  $F^{-1}(u)$

### Przykład

zaprojektować generator rozkładu wykładniczego

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & \text{gdy } x \geq 0 \\ 0, & \text{gdy } x < 0 \end{cases} \\ F(x) &= \int_0^x \alpha e^{-\alpha x} dx = [-e^{-\alpha x}]_0^x = 1 - e^{-\alpha x} = u \\ e^{-\alpha x} &= 1 - u \\ -\alpha x &= \ln(1 - u) \\ x &= -\frac{\ln(1 - u)}{\alpha} \end{aligned}$$

sposobienie

generator  $-\frac{\ln u}{\alpha}$  "ma ten sam rozkład"

[przykład w Statistica]

### Generatory do samodzielnego zaprojektowania

o rozkładzie trójkątnym

o rozkładzie Laplace'a

o rozkładzie Cauchy'ego

## Przybliżony generator rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0,1)$

$\Phi(x)$  – nie ma jawnej postaci analitycznej

$$\text{dla } x \geq 0, \Phi_+(x) \approx F_+(x) = \frac{1}{1 + e^{-kx_+}}, \text{ gdzie } k = \sqrt{\frac{8}{\pi}}$$

$F_+(x)$  – ma rozkład równomierny na odcinku  $[\frac{1}{2}, 1]$

$$u = 2(F_+(x) - \frac{1}{2}) \text{ – ma rozkład równomierny na odcinku } [0, 1]$$

$$u = 2F_+(x) - 1 = \frac{2}{1 + e^{-kx_+}} - 1$$

$$1 + e^{-kx_+} = \frac{2}{u + 1} \rightarrow x_+ = \frac{1}{k} \ln \frac{1 + u}{1 - u} \rightarrow x = \eta x_+, \text{ gdzie } P(\eta = -1) = P(\eta = 1) = \frac{1}{2}$$

## Generacja $\mathcal{N}(0,1)$ z zastosowaniem CTG – tzw. prawo tuzina

mamy ciąg  $\{u_i\}_{i=1}^N$  typu i.i.d.,  $u_i \sim \mathcal{U}[0, 1]$

$$\text{ponieważ } \mathbf{E}u_i = \frac{1}{2} \text{ i } \text{var}u_i = \frac{1}{12} \text{ to}$$

$$\xi_N = \frac{\sum_{i=1}^N u_i - \frac{N}{2}}{\sqrt{\frac{N}{12}}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \text{ według rozkładu, gdy } N \rightarrow \infty$$

dla  $N = 12$

$$\xi_N = \sum_{i=1}^{12} u_i - 6$$

Jak na podstawie generatora  $\mathcal{N}(0,1)$  zbudować generator  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ?

$$x \sim \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow \sigma x + m \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

### 3. Metoda odrzucania

#### Podstawa teoretyczna

**Lemat 1.** Jeżeli  $X \sim f(x)$  i  $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$  to para  $(X, Y)$ , gdzie  $Y = cf(X)U$ , zaś  $c$  jest dowolną stałą, czyli para

$$(X, cf(X)U)$$

ma rozkład jednostajny na zbiorze

$$A = \{(x, y) : x \in R, y \in [0, cf(x)]\}$$

#### Dowód.

obliczamy dystrybuantę warunkową (przy ustalonym  $X$ )

$$F_{y|x}(\alpha) = P(Y \leq \alpha | X = x) = P(cf(X)U \leq \alpha | X = x) = P(cf(x)U \leq \alpha) = P(U \leq \frac{\alpha}{cf(x)}) = \frac{\alpha}{cf(x)}$$

gęstość warunkowa

$$f_{y|x}(\alpha) = \frac{\partial F_{y|x}(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{1}{cf(x)} - \text{rozkład warunkowy jest jednostajny}$$

weźmy dowolny zbiór  $B \subseteq A$

$$P((X, Y) \in B) = P(B) = \iint_B f(x, y) dx dy = [\text{tw. Bayesa}] = \iint_B f_{y|x}(\alpha) f(x) dx d\alpha = \frac{1}{c} \iint_B dx dy = \frac{1}{c} \mu(B)$$

w szczególności dla  $B = A$

$$P((X, Y) \in A) = 1 = \frac{1}{c} \mu(A), \text{ stąd } c = \mu(A)$$

wniosek

$$P(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(A)} - \text{zatem rozkład na całym zbiorze } A \text{ jest równomierny}$$

**Lemat 2.** Jeżeli pewna para zmiennych losowych  $(X, Y)$  ma rozkład równomierny na zbiorze

$$A = \{(x, y) : x \in R, y \in [0, cf(x)]\}$$

to zmienna  $X$  ma funkcję gęstości prawdopodobieństwa równą  $f(x)$ .

**Dowód.**

wprowadzamy oznaczenie  $D$  – dowolny podzbiór zbioru liczb rzeczywistych

$$D \subseteq R$$

wprowadzamy oznaczenie  $B_D$  – zbiór par  $(x, y)$ , takich że  $x \in D$

$$B_D = \{(x, y) : x \in D, y \in [0, cf(x)]\} \subseteq A$$

wyznaczamy rozkład  $X$

$$P(X \in D) = P(D) = P((X, Y) \in B_D) = P(B_D) = [\text{r. równ.}] = \frac{\mu(B_D)}{\mu(A)} = \frac{\int_D cf(x)dx}{\int_R cf(x)dx} = \int_D f(x)dx, \text{ c.n.u.}$$

### Schemat metody

$f(x)$  – gęstość prawdopodobieństwa zmiennej  $X$ , której realizacje chcemy wygenerować

$g(x)$  – pomocnicza gęstość innej (łatwej w generacji) zmiennej losowej oraz istnieje  $c > 0$ , takie że

$$f(x) \leq cg(x) \text{ dla każdego } x \in R$$

#### *Etap 1. Generacja*

- wygenerować realizację  $x$  zm. los.  $X$  o gęstości  $g(x)$  (np. metodą inwersyjną)
- wygenerować realizację  $u$  zm. los.  $U$  z rozkładu równomiernego  $\mathcal{U}[0, 1]$
- utworzyć pary  $(x, y) = (x, cg(x)u)$ , o rozkładzie równomiernym na zbiorze  $A_g = \{(x, y) : x \in R, y \in [0, cg(x)]\}$

#### *Etap 1. Odrzucanie*

- odrzucić te pary  $(x, y)$  z *Etapu 1*, które nie należą do zbioru  $A_f = \{(x, y) : x \in R, y \in [0, f(x)]\}$ , tzn. pozostają pary spełniające warunek

$$cg(x)u \leq f(x)$$

i mają one rozkład równomierny na zbiorze  $A_f$

*Wniosek* – generator jest dokłany (żadnego przybliżenia).

### Warunki stosowalności metody

1) dla funkcji  $f(x)$  istnieje odpowiednie  $g(x)$

2)  $g(x)$  jest łatwe w generacji

3)  $g(x)$  musi "ciasno" opasać  $f(x)$ , dla zagwarantowania dużego prawdopodobieństwa przyjęcia

$$P(\text{przyjęcia } (x, y)) = \frac{\mu(A_f)}{\mu(A_g)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}{c \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx} = \frac{1}{c}$$

chcemy, aby  $\frac{1}{c} \rightarrow \max$ , ale  $c \geq 1$

### Dokładny generator rozkładu normalnego

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} - \text{rozkład Laplace'a}$$

można pokazać, że

$$f(x) \leq c g(x), \text{ gdzie } c = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}$$

określenie warunku selekcji

$$\sqrt{\frac{2e}{\pi}} \frac{1}{2} e^{-|x|} u \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

...

$$(|x| - 1)^2 \leq -2 \ln u$$

przed odrzuceniem realizacje  $x$  mają rozkład Laplace'a, natomiast po odrzuceniu –  $x \sim \mathcal{N}(0, 1)$